

**ION CUCULESCU  
CONSTANTIN OTTESCU  
OLIMPIA POPESCU**

# **GEOMETRIE**

**VIII**



Prof. univ. ION CUCULESCU

Prof. CONSTANTIN OTTESCU

Prof. OLIMPIA POPESCU

# MATEMATICĂ

# 8

Manual pentru clasa a VIII-a

GEOMETRIE



Editura didactică și pedagogică  
București-1983



# PUNCTE, DREPTE, PLANE

## Introducere

În clasele precedente ne-am ocupat cu studiul anumitor mulțimi de puncte ale unui plan. Le-am numit figuri geometrice și le-am concretizat prin desene. Dar lumea care ne înconjoară nu este o lume de figuri plane. Există o deosebire între personajele „plate” ale unui film de cinematograf și cele „în spațiu”, în relief de pe scena unui teatru, cum există o deosebire între fotografie și obiectul fotografiat.

În geometria în spațiu ne vom ocupa, prin abstractizare, cu mulțimi de puncte din lumea care „are relief”. Pentru aceasta trebuie să pornim de la noțiuni „primare”, de la lucruri despre care „știm ce înseamnă”, pe care nu le definim prin altele, ci, cel mult, le descriem pentru înțelegere prin comparații, prin concretizări.

**PUNCTUL** din geometria în spațiu este similar cu cel din geometria în plan. Nu are „întindere” și nu poate fi confundat cu o bulină.

**DREAPTA**, de asemenea, o cunoaștem din geometria în plan. Este comparabilă cu un fir bine întins, presupus „prelungit oricât”, dar, spre deosebire de acesta, n-are grosime. Se consideră a fi o mulțime de puncte.

**PLANUL** este comparabil cu suprafața unei ape liniștite. Asemănarea este însă foarte aproximativă, pentru că „apa liniștită” este o porțiune a unui glob (cel terestru). Planul n-are nici el grosime, nu este „strat”, conține drepte, este o mulțime de puncte.

În figura 1.1 sînt desenate un punct  $A$ , o dreaptă  $d$  și un plan  $\alpha$ . Notăm punctul cu o literă mare, iar dreapta cu o literă mică din alfabetul latin și planul cu o literă din alfabetul grec. Aceasta este o simplă convenție de notație, de la care ne putem uneori abate.



Fig. 1.1.

Planul îl desenăm (deși este nemărginit, conținând drepte, așa cum vom vedea mai departe), printr-o porțiune a sa dreptunghiulară, care, în perspectivă\* va apărea ca un paralelogram.

Alteori, pentru a nu complica figura, vom reprezenta, în desen, planul ca pe un triunghi.

\* Vom explica într-una din lecțiile următoare ce se înțelege prin „perspectivă”.

## PROPOZIȚII DESPRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

Considerăm adevărate, de la început, următoarele propoziții:

**P<sub>1</sub>.** Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una; orice dreaptă are cel puțin două puncte distincte.

Prima parte a acestei afirmații se mai poate formula și astfel:  
Două puncte determină o dreaptă și numai una.

**P<sub>2</sub>.** Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la ea și numai una. (Postulatul lui Euclid.) (Acceptăm deci implicit că două paralele sînt în același plan.)

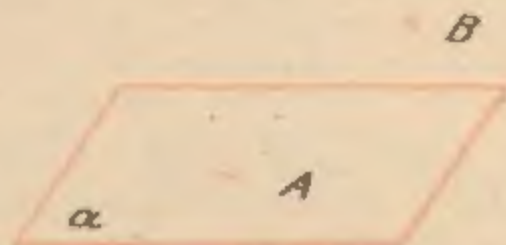
**P<sub>3</sub>.** Fiind date trei puncte necoliniare, există un plan și numai unul care să le conțină; într-un plan există cel puțin trei puncte necoliniare.

Prima parte a acestei afirmații se mai poate formula:

Trei puncte necoliniare determină un plan și numai unul.

Dacă punctul  $A$  este în planul  $\alpha$  (fig. 1.2) se scrie  $A \in \alpha$  și dacă punctul  $B$  nu aparține planului  $\alpha$ , se scrie  $B \notin \alpha$ .

Fig. 1.2

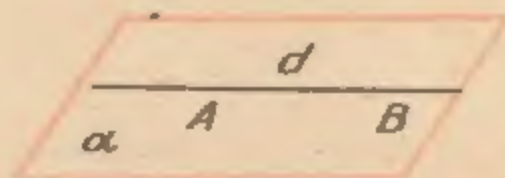


*Observație.* Propozițiile  $P_1$  și  $P_3$  erau adevărate și în geometria plană.

**P<sub>4</sub>.** Dacă două puncte distincte  $A$  și  $B$  sînt situate într-un plan, dreapta determinată de ele are toate punctele în acel plan.

Altfel spus: Dreapta determinată de punctele  $A$  și  $B$ , situate în planul  $\alpha$ , este conținută (sau situată) în planul  $\alpha$  (fig. 1.3).

Fig. 1.3



Din această ultimă propoziție, rezultă că un plan este nemărginit, așa cum afirmam în pagina anterioară.

**P<sub>5</sub>.** Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele mai au încă cel puțin unul.

**Consecință:** Două plane distincte, care au un punct comun, au o dreaptă comună.



Într-adevăr, dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  au un punct  $P$  comun, mai au încă un punct  $Q$  comun, deci au și dreapta  $PQ$  comună (am notat, de data aceasta, dreapta, nu printr-o singură literă mică, ci prin două din punctele ei) (fig. 1.4)

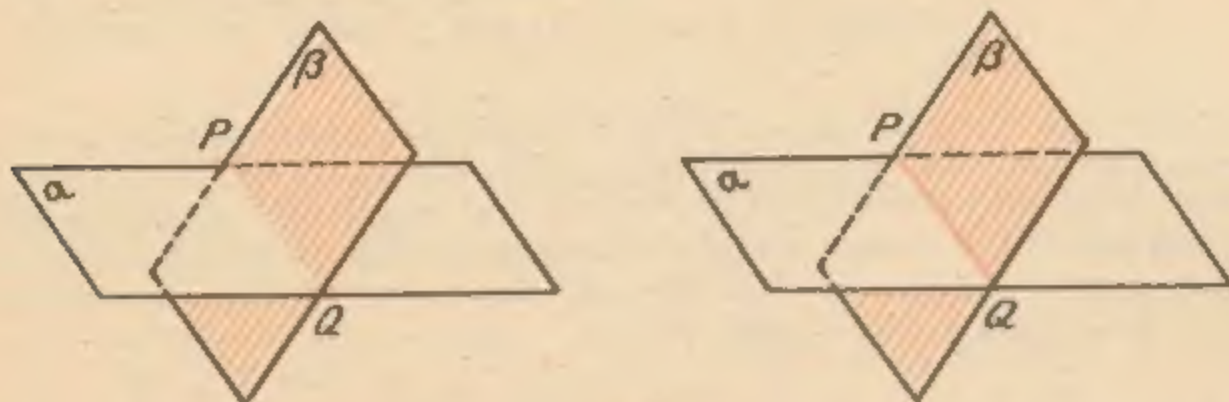


Fig. 1.4

*Observație.* Consecința de mai sus nu exclude existența a două plane care n-au nici un punct comun (acestea se numesc plane paralele și de ele ne vom ocupa mai târziu).

**P<sub>4</sub>** *Există numai puncte necomune în același plan (necoplanare).* Această propoziție, împreună cu P<sub>3</sub>, ne „scoate în spațiu”. Fără ea am studia tot geometria în plan.

\* \* \*

În fiecare plan din spațiu, considerăm adevărate toate propozițiile (axiomele și teoremele) valabile în geometria plană. În plus, relațiile de congruență și asemănare „operează” și în planuri diferite. De pildă, două triunghiuri pot fi congruente, chiar dacă nu sînt în același plan (bineînțeleas aceasta înseamnă că am acceptat aceeași afirmație pentru segmente și unghiuri). Toate relațiile de ordine se mențin, de asemenea.

## DETERMINAREA PLANULUI

1) P<sub>3</sub> ne afirmă că: *Trei puncte necoplanare determină un plan.*

Din acest motiv, uneori, vom nota planul care conține punctele  $A, B, C$ , astfel:  $(ABC)$ .

Vom demonstra că:

2) *O dreaptă și un punct care nu îi aparține determină un plan.* (Prin „determină un plan” înțelegem că există un plan și numai unul care le conține.)

Într-adevăr, fie  $d$  și  $A \notin d$  (fig. 1.5). Ținînd seama de a doua parte a lui P<sub>1</sub>, putem considera două puncte  $B$  și  $C$  aparținînd dreptei  $d$ . Punctele  $A, B, C$  determină un plan care conține și dreapta  $d$ , pentru că îi aparțin atît  $B$  cît

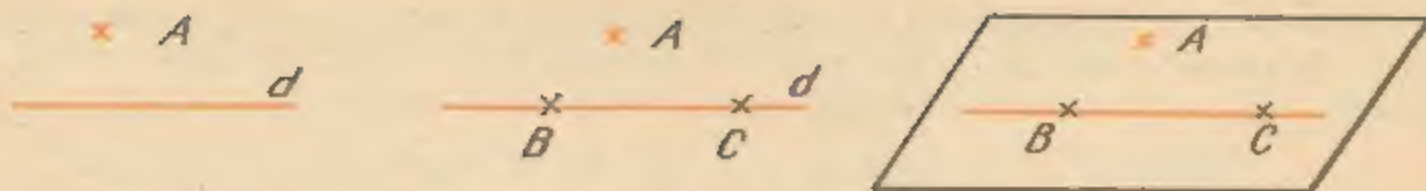


Fig. 1.5

și  $C$ . Acest plan este unic. Dacă ar mai exista un alt plan, care să conțină dreapta  $d$  și punctul  $A$ , atunci și  $B$  și  $C$  i-ar aparține, deci acest plan ar coincide cu primul plan (conform cu  $P_3$ ). Uneori vom nota planul determinat de dreapta  $d$  și de punctul  $A$  astfel:  $(d, A)$ .

3) *Două drepte care au un punct comun determină un plan.*

Fie dreptele  $d_1$  și  $d_2$ , concurente în  $A$  (fig. 1.6). Luăm  $M \in d_2$ ,  $N \in d_1$ . Punctele  $A$ ,  $M$ ,  $N$  determină un plan care, evident, conține dreptele date.

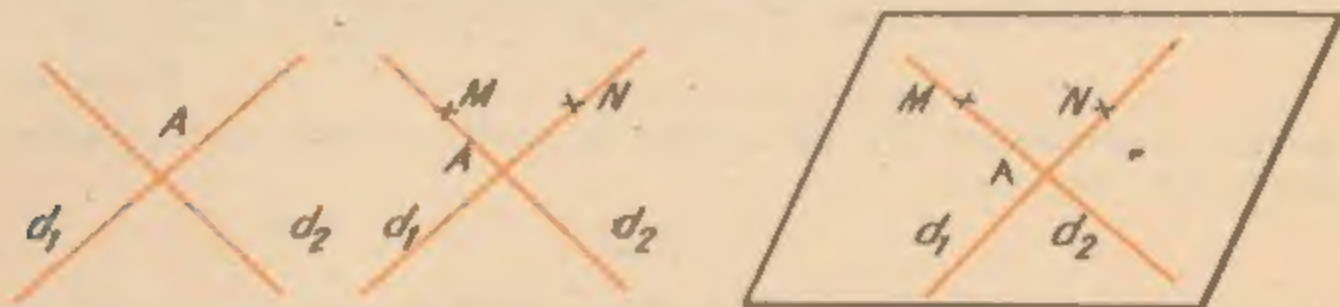


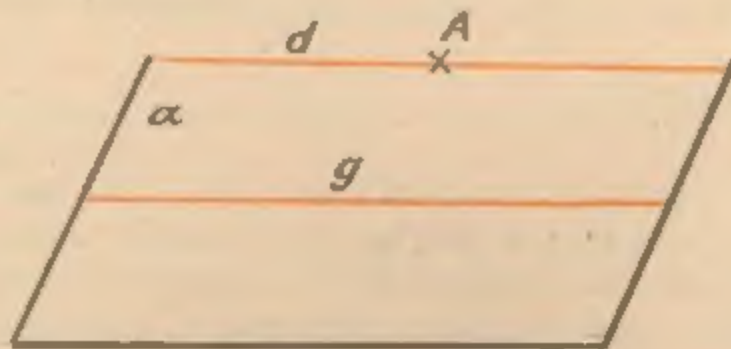
Fig. 1.6

Dacă ar mai exista un alt plan, care să conțină aceste drepte, ar conține și cele trei puncte, deci ar coincide cu primul.

4) *Două drepte paralele determină un plan.*

Fie  $d$  și  $g$  două drepte paralele și  $A \in d$ . Punctul  $A$  și dreapta  $g$  determină planul  $\alpha$ . Dacă ținem seama de  $P_2$ , afirmăm că  $d$  și  $g$  sînt coplanare. Fie  $\beta$  planul lor. Dar planele  $\alpha$  și  $\beta$  au comune dreapta  $g$  și punctul  $A$ , deci coincid (fig. 1.7).

\* Fig. 1.7





# POZIȚIILE RELATIVE ALE DREPTELOR ȘI ALE PLANELOR ÎN SPAȚIU

## POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ DREPTE ÎN SPAȚIU

Știm, din geometria în plan, că două drepte (situate în același plan) pot avea un punct comun (pot fi concurente) sau pot să nu aibă un punct comun (să fie paralele) (fig. 1.8).

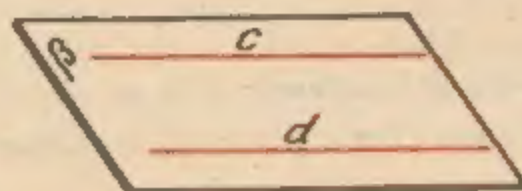
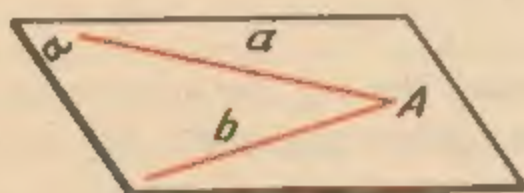


Fig. 1.8

În spațiu există însă și drepte care, deși nu sînt paralele, n-au nici un punct comun. Ca exemplu, închipuiți-vă încăperea din figura 1.9. Considerați marginea  $a$  a peretelui pe care există tabla și latura  $b$  a podelei. Bineînțeles că aceasta nu constituie o demonstrație! Să încercăm să demonstrăm această propoziție.

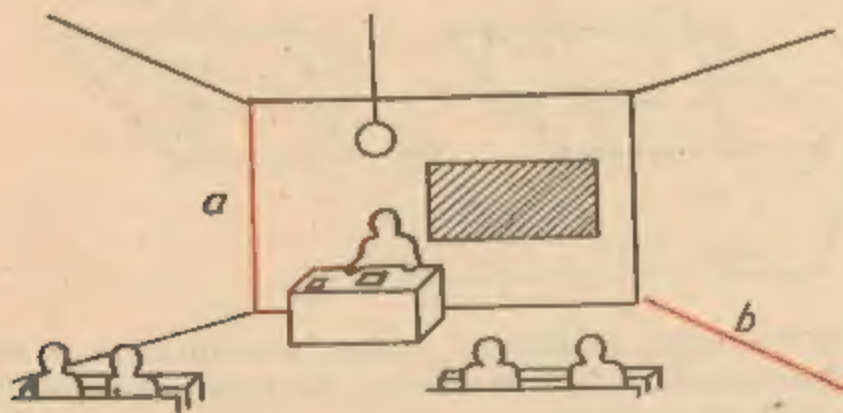


Fig. 1.9

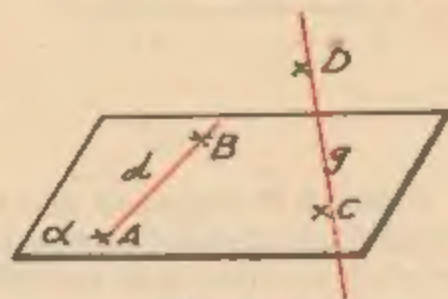


Fig. 1.10

Ne vom folosi de  $P_0$ . Fie punctele  $A, B, C, D$  nesituate în același plan. Considerăm dreapta  $d$  (care trece prin  $A$  și  $B$ ) și  $g$  dreapta (care trece prin  $C$  și  $D$ ) (fig. 1.10),  $d \cap g = \emptyset$ . Dacă  $d$  și  $g$  s-ar întâlni, ar însemna că  $A, B, C, D$  ar fi coplanare. Dar aceasta este contrară ipotezei. **Vom numi astfel de drepte, care nu au nici un punct comun și nu sînt nici paralele, drepte necoplanare.**



Știm că, în general, desenăm dreptele ca pe niște interioare de segmente. De obicei vom desena ca în figura 1.11:



Fig. 1.11

**Problemă rezolvată.** Fie  $A, B, C, D$  patru puncte, nesituate toate într-un același plan. Câte plane determină aceste patru puncte?

**Rezolvare.** Fie  $\alpha$  planul determinat de punctele  $A, B$  și  $C$  (fig. 1.12). Evident,  $A, B, C$  nu sînt coliniare, căci, dacă ar fi coliniare, atunci dreapta care le conține, împreună cu  $D$ , ar determina un plan și deci  $A, B, C, D$  ar fi coplanare. Deci în afara planului  $\alpha$  rămîne numai punctul  $D$ .

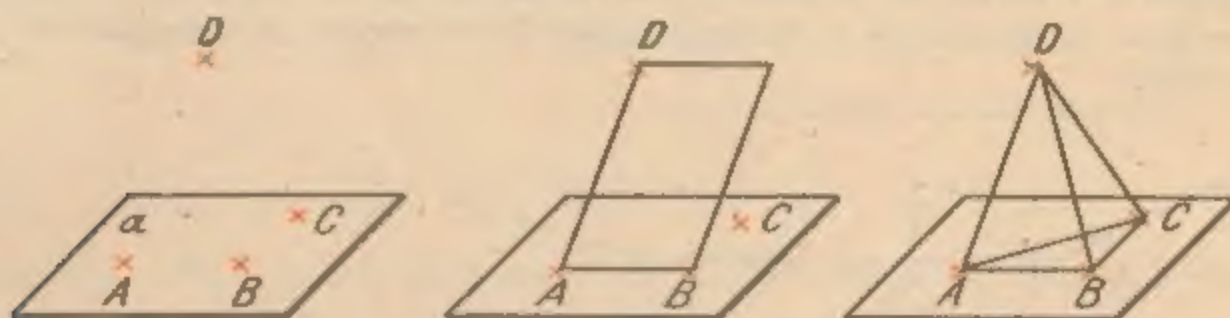


Fig. 1.12

Punctul  $D$  împreună cu  $A$  și  $B$  determină un plan  $\alpha_1$ . Analog, punctul  $D$  împreună cu  $B$  și  $C$  și cu  $A$  și  $C$  determină cîte un plan  $\alpha_2$  și respectiv  $\alpha_3$ . Deci cele patru puncte determină planele  $(ABC)$ ,  $(ABD)$ ,  $(BCD)$  și  $(ACD)$ .

Am mai putea gîndi și astfel: cîte grupe de cîte trei puncte, dintre punctele  $A, B, C, D$ , putem forma, astfel încît două grupe să difere între ele printr-un punct? Putem lua perechea  $(A, B)$  cu  $C$  și cu  $D$ , și obținem  $(ABC)$ ,  $(ABD)$ . Putem lua perechea  $(B, C)$  cu  $D$  și obținem  $(BCD)$  (cu  $A$  s-a considerat mai sus). Dacă mai considerăm și grupa  $(ACD)$ , am obținut cele patru plane determinate de punctele  $A, B, C, D$ .

Sau altfel: odată ce am ales trei puncte din patru (care determină un plan), rămîne în afara acestui plan un singur punct.

În cîte moduri poate rămîne un punct „afară”? Evident, în patru moduri. Deci există patru plane diferite.

## PROBLEME 1

1. Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare.
  - a) Pot fi coliniare? Justificați răspunsul dat.
  - b) Unindu-le două câte două, câte astfel de drepte se pot duce?
2. Dându-se patru puncte, dintre care oricare trei sînt coliniare, câte drepte determinate de câte două dintre ele se pot duce? (În loc de „se pot duce” putem spune „există”, deoarece uneori nu le vom desena ci numai vom demonstra că ele sînt determinate.)
3. Din patru puncte date, exact trei sînt coliniare.
  - a) Cîte plane diferite, care să conțină trei dintre ele, necoliniare, există?
  - b) Cîte plane care să conțină trei dintre ele există?
4. Fie  $d$  și  $g$ , două drepte coplanare. Fie  $A$  un punct aparținînd lui  $d$  și  $B$  un punct aparținînd lui  $g$ . Să se arate că  $M$ , mijlocul segmentului  $AB$ , se află în planul determinat de  $d$  și  $g$ .
5. Într-un plan  $\alpha$  sînt date punctele distincte  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  și, în afara lui, un punct  $M_7$ .
  - a) Care este cel mai mic număr de plane, exceptînd planul  $\alpha$ , determinate de trei dintre ele și în ce situație se obține? b) Dar cel mai mare? c) Există numai trei astfel de plane?
- 6\*. Într-un plan  $\alpha$  sînt date 6 puncte distincte,  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  și în afara lui, un punct  $M_7$ .
  - a) Care este cel mai mic număr de drepte, care să treacă prin cel puțin două dintre ele? b) Dar cel mai mare număr?
7. În figura 1.3, punctele  $A$  și  $B$  nu sînt situate în planul  $\alpha$ . Dacă  $\{P\} = AB \cap \alpha$  și  $Q$  un punct oarecare al planului  $\alpha$ , să se arate că  $PA + PB \geq |QA - QB|$ .

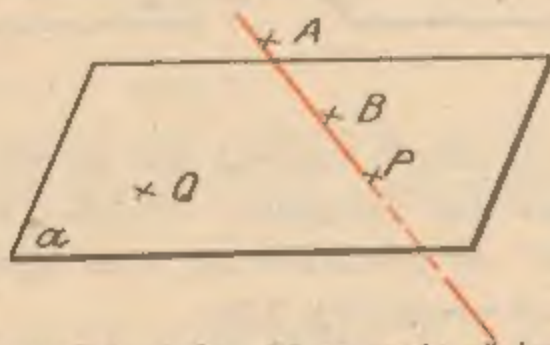


Fig. 1.13

8. Se dau dreptele paralele  $d$  și  $g$ . Să se arate că toate dreptele care au un punct comun cu  $d$  și unul cu  $g$  sînt conținute în planul determinat de  $d$  și  $g$ .
9. Dacă dreapta  $d_1$  este coplanară cu  $d_2$ , și  $d_2$  este coplanară cu  $d_3$ , rezultă că  $d_1$  și  $d_3$  sînt coplanare?
10. Dându-se două drepte concurente  $d$  și  $g$ , să se găsească locul geometric al punctelor dreptelor care se sprijină pe  $d$  și sînt paralele cu  $g$  (Prin „se sprijină” înțelegem că au un punct comun cu  $d$ ).

\* Vom nota cu \* problemele a căror rezolvare implică, după părerea noastră, o ingeniozitate sporită. Este o indicație pentru predarea diferențiată.



11. Se dă un punct fix  $A$  și dreapta  $d$ . Să se găsească locul geometric al punctelor dreptelor care trec prin  $A$  și printr-un punct mobil  $B \in d$ .

## POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN PLAN

1. *O dreaptă poate avea ca unic punct comun cu un plan două puncte*

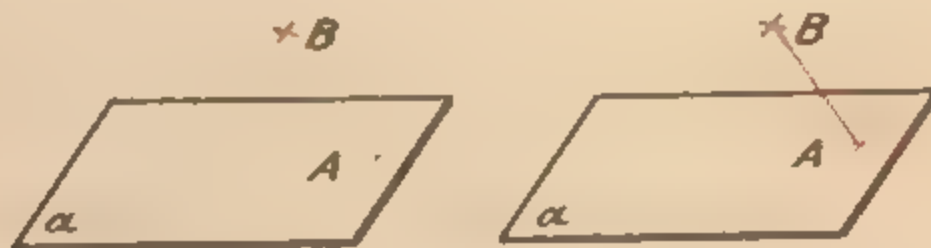
Știm atunci că ea este în întregime conținută în acest plan ( $P_4$ ).

2. *O dreaptă poate avea în schimb punct comun cu un plan*

Priviți, de exemplu, linia de intersecție a doi pereți și planul podelei. Dar cum această observație nu este o demonstrație, să dăm una:

Fie planul  $\alpha$ , un punct  $A \in \alpha$  și un punct  $B$  nesituat în planul  $\alpha$  ( $B \notin \alpha$ ). Dreapta  $d$ , care trece prin  $A$  și  $B$ , are numai punctul  $A$  comun cu  $\alpha$ . Dacă ar mai avea încă un punct  $C$  în  $\alpha$ , ar fi conținută în întregime în  $\alpha$ , ceea ce nu este adevărat: ( $B \notin \alpha$ ) (fig. 2.1).

Fig. 2.1



*Convenție.* De multe ori, când o dreaptă are un punct comun cu planul, vom utiliza și o exprimare mai familiară: dreapta „înțeapă” planul. Vom desena segmentul „mască” de porțiunea de plan figurată, punctat, în rest dreapta va fi desenată neîntrerupt (fig. 2.2).

Fig. 2.2



3. *O dreaptă  $d$  poate să nu aibă nici un punct comun cu planul ( $d \cap \alpha = \emptyset$ ).*

Vom spune, în acest caz, că dreapta este paralelă cu planul.

Să arătăm că există astfel de drepte. Fie un plan  $\alpha$ , o dreaptă  $a$  situată în acest plan ( $a \subset \alpha$ ) și un punct  $A$  nesituat în planul  $\alpha$  ( $A \notin \alpha$ ) (fig. 2.3).

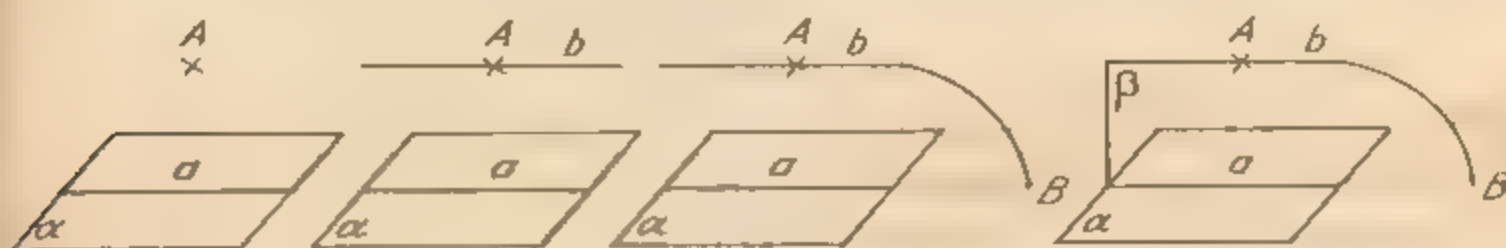


Fig. 2.3

Prin  $A$  ducem dreapta  $b$  paralelă cu  $a$ . Afirmăm că  $b$  este paralelă cu planul  $\alpha$ . Procedăm prin reducere la absurd. Presupunem că  $b$  înțeapă planul în punctul  $B$  ( $b \cap \alpha = \{B\}$ ). Notăm planul determinat de dreptele paralele  $a$  și  $b$  cu  $\beta$ . Planele  $\alpha$  și  $\beta$  au comună dreapta  $a$ . Dacă  $B$  nu s-ar afla pe  $a$ , ar însemna că  $\beta$  și  $\alpha$  ar coincide, pentru că au o dreaptă  $a$  și un punct  $B$  exterior ei, comune. Deci  $B$ , aparținând intersecției celor două plane, se află pe  $a$ . Dar aceasta este imposibil, pentru că  $a$  și  $b$  sînt paralele.

În fond, am demonstrat prin aceasta următoarea

**Teoremă.**

(sau conținută în el)

Rezumînd deci, o dreaptă poate avea, relativ la un plan, următoarele trei poziții:

- 1) să fie conținută în plan;
- 2) să aibă un singur punct comun cu planul;
- 3) să fie paralelă cu planul (nici un punct comun cu el).

## POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ PLANE

Știm din  $P_3$  că dacă două plane au trei puncte necoliniare comune, ele coincid.

Există plane care au numai o dreaptă comună? Da, sîntem îndemnați să spunem, privind linia după care se întîlnește un perete al clasei cu tavanul! Dar să și demonstrăm. Să considerăm un plan  $\alpha$ , o dreaptă  $d \subset \alpha$  și un punct  $A \notin \alpha$ . Dreapta  $d$  și punctul  $A$  determină un plan  $\beta$ , care are comun cu planul  $\alpha$  numai dreapta  $d$ . Într-adevăr, dacă  $\beta$  ar mai avea comun cu  $\alpha$  încă un punct  $B$ , neapărînd lui  $d$ , ar coincide cu  $\alpha$ , deci  $A \in \alpha$ , ceea ce este fals (fig. 2.4).



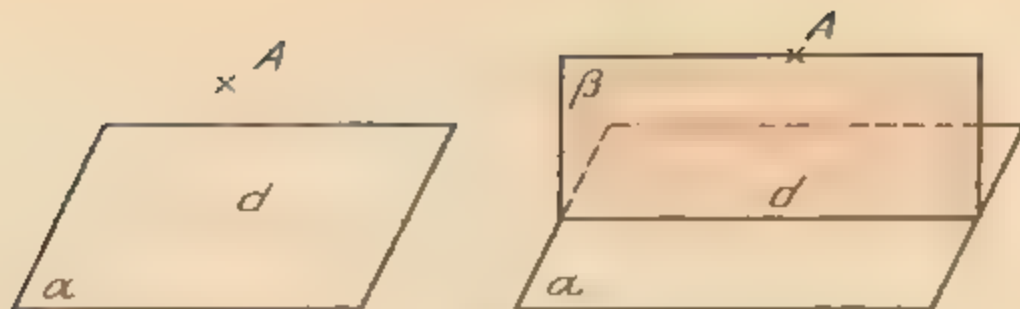


Fig. 2.4

Demonstrația precedentă ne-a arătat că există plane (cum sînt  $\alpha$  și  $\beta$ ), care au numai o dreaptă comună, altfel spus: se întîlnesc după o dreaptă.

Dar există oare plane care n au nici un punct comun? Un exemplu ar fi podeaua și tavanul. Dar să dăm și o demonstrație.

Pentru aceasta să demonstrăm următoarea:

**Lemă (teoremă ajutătoare).**

Există, într-adevăr, astfel de plane: luăm un punct  $C$  care nu-i nici pe  $a$ , nici pe  $b$ , el determină cu  $a$  și cu  $b$  respectiv planele căutate. Intersecția lor  $c$  trece prin  $C$  și afirmăm că este paralelă cu  $b$ . Dacă dreptele  $b$  și  $c$  n-ar fi paralele, fiind coplanare (situate în  $\beta$ ), ar avea un punct comun  $D$  (fig. 2.5).



Fig. 2.5

Considerăm acum planul  $\gamma$ , determinat de dreptele paralele  $a$  și  $b$ . Punctul  $D$  ar aparține planului  $\gamma$ , deoarece aparține dreptei  $b$ , conținută în  $\gamma$ , ( $D \in b \subset \gamma \Rightarrow D \in \gamma$ ). Dar  $D \in \alpha$  (pentru că  $D \in c \subset \alpha$ ). Deci, punctul  $D$  s-ar afla la intersecția planelor  $\alpha$  și  $\gamma$ , deci pe dreapta  $a$ . Cu alte cuvinte, punctul  $D$  ar aparține atât dreptei  $a$  cît și dreptei  $b$ . Dar acest lucru este imposibil, pentru că  $a$  și  $b$  sînt paralele.

Putem acum demonstra că **Prin orice punct exterior unui plan există un singur plan care să-l conțină**: Fie un plan  $\alpha$ , două drepte  $a$  și  $b$  în planul  $\alpha$ , concurente în  $P$  și un punct  $Q$  exterior planului. Prin  $Q$  ducem dreapta  $a'$ , paralelă cu  $a$ , și dreapta  $b'$ , paralelă cu  $b$  (fig. 2.6).

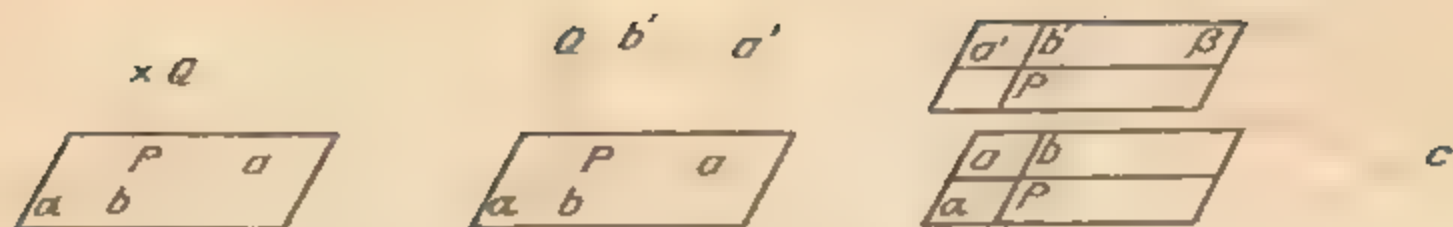


Fig. 2.6

Dreptele  $a'$  și  $b'$  determină un plan  $\beta$ . Dacă planele  $\alpha$  și  $\beta$  n-ar fi paralele, ar avea o dreaptă comună  $c$ , care ar trebui să fie paralelă atât cu  $b$  cât și cu  $a$ , ceea ce ar contrazice postulatul lui Euclid,  $a$  și  $b$  fiind concurente în  $P$ .

Rezumînd:

*Altă situație nu există!*

Din demonstrația anterioară, rezultă și următoarea teoremă, utilă la rezolvarea multor probleme:

## CÎTEVA TEOREME DE PARALELISM

**Teorema 1.** 

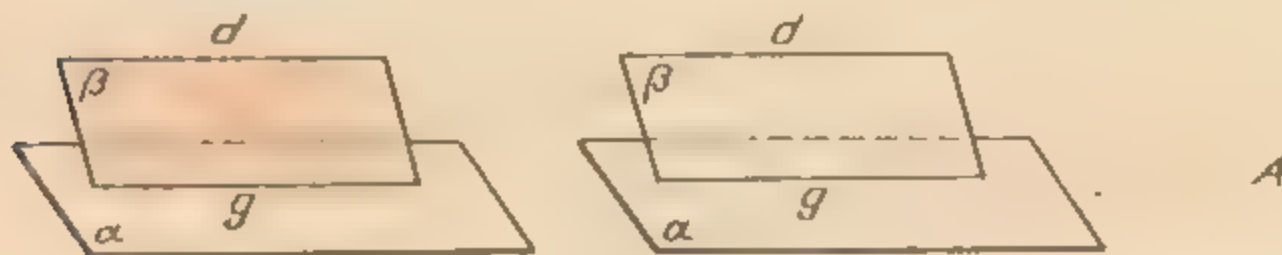


Fig. 2.7

**Demonstrație.** Dreptele  $d$  și  $g$ , fiind coplanare (fig. 2.7), sînt fie paralele, fie concurente. Dacă ar fi concurente (în  $A$ ), ar rezulta că acest punct aparține și dreptei  $d$  și planului  $\alpha$ . Dar cum  $d$  și  $\alpha$  sînt paralele, rezultă că și  $d$  și  $g$  sînt paralele. Această teoremă poate fi considerată o reciprocă a celei de la pagina 11.

**Teorema 2.**



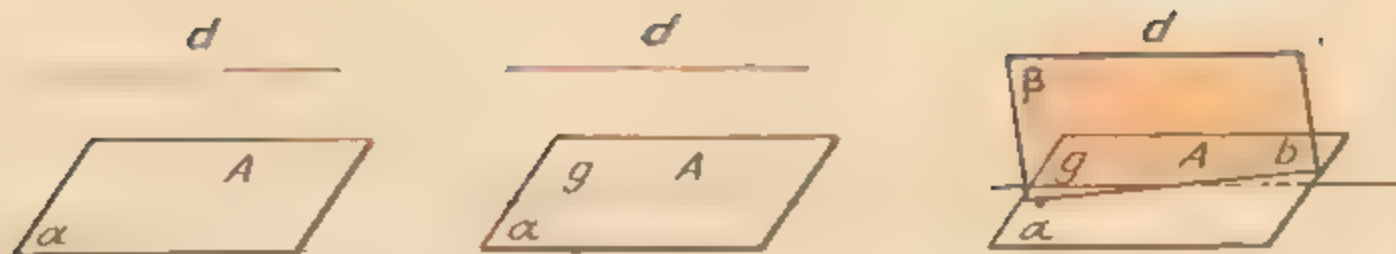


Fig. 2.8

**Demonstrație** Presupunem, prin reducere la absurd, că  $g$  nu este conținută în  $\alpha$  (fig. 2.8). Considerăm planul determinat de dreptele  $d$  și  $g$ , notat cu  $\beta$ . Planele  $\alpha$  și  $\beta$  se taie după  $b$ . Deci, în planul  $\beta$ , prin punctul  $A$  trec dreptele  $g$  și  $b$ , ambele paralele cu  $d$ , ceea ce este imposibil.

**Teorema 3.** Tranzitivitatea relației de paralelism

**Demonstrație** Dacă dreptele sunt toate trei coplanare, este vorba de o consecință evidentă a aximei paralelor din geometria în plan. Dacă sunt numai două dintre dreptele coplanare, presupunem că  $a \parallel b$  și  $b \parallel c$  și vom arăta că  $a \parallel c$  (fig. 2.9). Considerăm planul  $\beta$ , determinat de  $b$  și  $c$ , și dăcem, printr-un punct  $A \in c$ , o dreaptă  $g \parallel a$ . Conform teoremei precedente,  $g \subset \beta$ . Faptă de

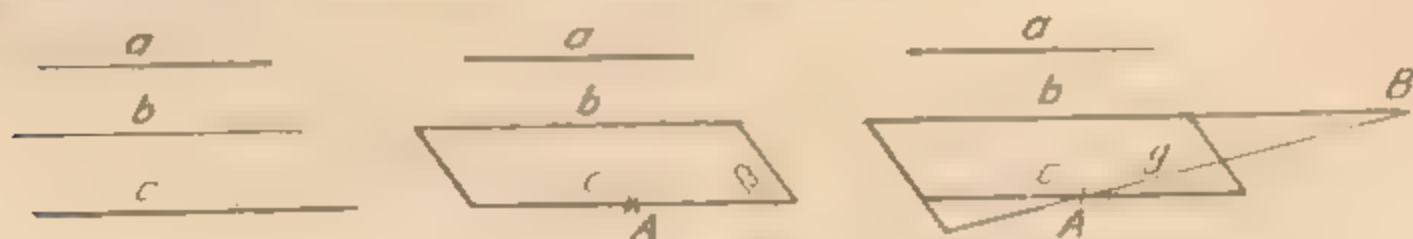


Fig. 2.9

dreapta  $b$ , dreapta  $g$  poate fi paralelă sau o poate întâlni într-un punct  $B$ . Dacă s-ar întâlni într-un punct  $B$ , ar rezulta că prin  $B$  se pot duce două paralele distincte,  $b$  și  $g$ , la  $a$ . S-ar contrazice astfel postulatul lui Euclid. Rezultă deci că dreapta  $g$  coincide cu  $c$  și deci tranzitivitatea este demonstrată.

**Problemă rezolvată.** Se dau trei drepte  $d_1$ ,  $d_2$  și  $d_3$ , astfel încât oricare pereche din ele să fie necoplanară, și nici toate trei să nu fie paralele cu un același plan. Să se arate că există o dreaptă  $g$  care se „sprijină” pe  $d_1$  și pe  $d_2$  și care este paralelă cu  $d_3$ . Să se arate că această dreaptă este unică.

**Existența.** Considerăm un punct  $A$  pe  $d_1$  și ducem prin  $A$  dreapta  $d'_3$  paralelă cu  $d_3$ . Dreptele  $d_1$  și  $d'_3$  determină un plan  $\alpha$ , paralel cu  $d_3$  (pentru că  $d'_3 \subset \alpha$  și  $d'_3 \parallel d_3$ ), care intersectează dreapta  $d_2$  în punctul  $B$  (fig. 2.10).

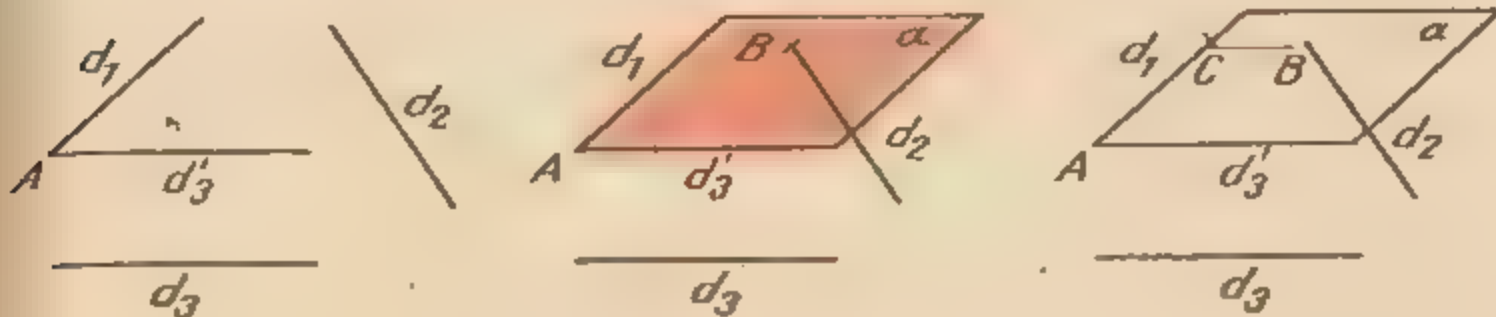


Fig. 2 10

Ducem prin punctul  $B$  dreapta  $BC$  paralelă cu  $d_3$  ( $C \in d_1$ ); dreapta  $BC$  este chiar dreapta  $g$  căutată.

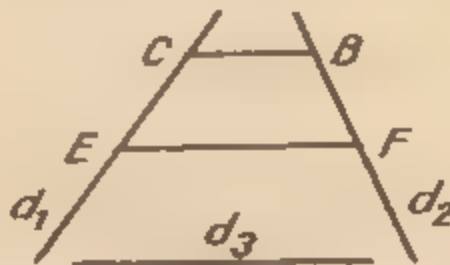
Vom da, ca să puteți spune unde este greșeala, o

**Falsă demonstrație de unicitate.** Deși punctul  $A$  este arbitrar ales pe  $d_1$ , planul  $\alpha$  paralel cu  $d_3$  este unic. Acest plan este intersectat de dreapta  $d_2$  într-un punct  $B$ , evident unic. Din postulatul lui Euclid, paralela  $BC$  la  $d'_3$ , deci la  $d_3$ , este evident unică. Deci dreapta  $g$  este unică.

Chiar dacă este adevărat că dreapta  $g$  este unică, demonstrația de mai sus trebuie s-o considerăm totuși eronată. Greșeala constă în faptul că metoda de construcție folosită la demonstrarea existenței nu este singura metodă posibilă și astfel, demonstrația unicității a devenit dependentă de construcția aleasă.

**Unicitatea.** Considerăm că, „sprijinindu-se” pe  $d_1$  și  $d_2$ , există două drepte  $CB$  și  $EF$ , amândouă paralele cu  $d_3$  (fig. 2.11). Aceste drepte,  $CB$  și  $EF$ , vor fi deci paralele între ele, și deci coplanare. Deci și dreapta  $CE = d_1$  și dreapta  $BF = d_2$  se găsesc într-un același plan determinat de  $CB$  și  $EF$ . Această concluzie însă este absurdă, pentru că în ipoteză am precizat că  $d_1$  și  $d_2$  nu sînt coplanare.

Fig. 2.11



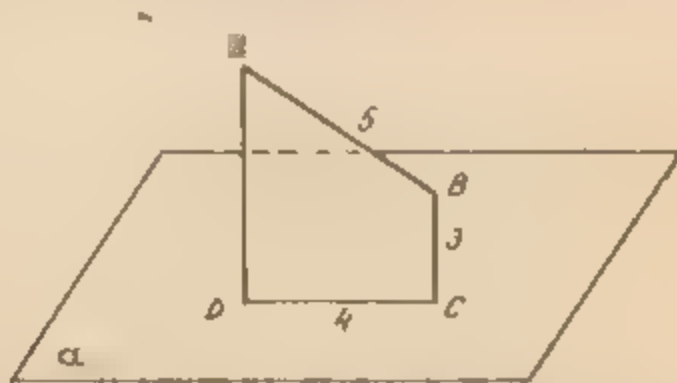
Aceasta este o demonstrație de unicitate corectă, pentru că face abstracție de modul cum s-a demonstrat existența. Ne-am oprit mai mult la comentarea acestei probleme pentru a pune în evidență un tip de eroare de raționament, destul de des întâlnit, dar care trebuie evitat cu multă grijă.

**Atenție!** La o demonstrație de unicitate, evitați să folosiți demonstrația de existență.

1. Două dreptunghiuri  $ABCD$  și  $MNCD$  au o latură comună  $CD$  și sînt situate în plane diferite. Demonstrați că  $AB$  și  $MN$  sînt paralele.

2. Trapezul  $ABCD$  are latura ne paralelă  $CD$  situată în planul  $\alpha$ , ca în figura 2.12 ( $A$  și  $B$  nu se află în planul  $\alpha$ ). Dacă  $AB = 5$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CD = 4$  cm, calculați  $DE$ ,  $E$  fiind punctul unde  $AB$  înțeapă planul  $\alpha$ .

Fig. 2.12



3. Dacă dreptele  $a \parallel b \parallel c$ , rezultă că sînt toate coplanare?

4. Se dau două plane  $\alpha$  și  $\beta$  și două drepte  $a \subset \alpha$  și  $b \subset \beta$ . Dacă  $a \parallel \beta$  și  $b \parallel \alpha$  și  $a$  nu este paralelă cu  $b$ , să se demonstreze că planele  $\alpha$  și  $\beta$  sînt paralele.

5. Fînd date patru puncte necoplanare, după cîte drepte se intersectează planele determinate de cîte trei din aceste puncte?

6. Dîndu-se două plane paralele, arătați că orice dreaptă din primul plan este paralelă cu al doilea.

7. \*Formulați o reciprocă a propoziției din problema 6 și verificați dacă aceasta este sau nu adevărată.

8. Este oare suficient ca două plane să fie paralele cu aceeași dreaptă, ca să fie paralele între ele?

9. Dîndu-se două plane paralele, orice dreaptă din primul plan este paralelă cu orice dreaptă din al doilea?

10. Un triunghi  $ABC$  are latura  $BC$  conținută în planul  $\alpha$ , iar  $M \in AB$  și  $N \in AC$ . Stabiliți poziția dreptei  $MN$  față de planul  $\alpha$  dacă: a)  $AM = 5$  cm,  $AN = 10$  cm,  $MB = 3$  cm,  $NC = 6$  cm; b)  $AM = 1$  cm,  $AN = 3$  cm,  $MB = 1$  cm,  $NC = 5$  cm.

11. Dacă un plan este paralel cu două laturi ale unui triunghi, demonstrați că este paralel cu a treia latură a triunghiului.

12. Un trapez  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) are latura  $AB$  conținută într-un plan  $\alpha$ . Un plan ce conține dreapta  $CD$  intersectează planul  $\alpha$  după o dreaptă  $g$ . Stabiliți poziția dreptelor  $AB$  și  $g$ .



## POZIȚIILE RELATIVE A TREI PLANE

Știm în ce poziții relative se pot afla două plane. Să vedem în ce situații relative se pot afla trei plane, diferite două câte două.

1. *Un plan este perpendicular pe două plane diferite care se intersectează în dreapta  $d$ .* (fig. 3 1).

Spre exemplu, un dosar cu o filă.



Fig. 3 1

Într-adevăr, considerăm dreapta  $d$  și un plan  $\delta$  care intersectează dreapta  $d$  în punctul  $P$ . Prin  $P$  ducem, în planul  $\delta$ , trei drepte  $a, b, c$ , distincte. Dreptele  $a$  și  $d$  determină planul  $\alpha$ ,  $b$  și  $d$  planul  $\beta$ ,  $c$  și  $d$  planul  $\gamma$ . Aceste plane sînt distincte: dacă ar fi confundate, ar coincide cu  $\delta$ , dar dreapta lor comună  $d$  nu este conținută în  $\delta$ .

2. *Un plan este perpendicular pe două plane diferite care se intersectează în dreapta  $d$ .*

Într-adevăr, în planul  $\alpha$  desenăm dreptele  $b$  și  $c$ , care trec prin punctul  $P$ . Fie  $A$  un punct exterior planului  $\alpha$  (fig. 3 2). Notăm dreapta  $AP$  cu  $a$  și planele determinate de  $a, b$  cu  $\gamma$  și  $a, c$  cu  $\beta$ . Planele  $\alpha, \beta, \gamma$  au toate trei

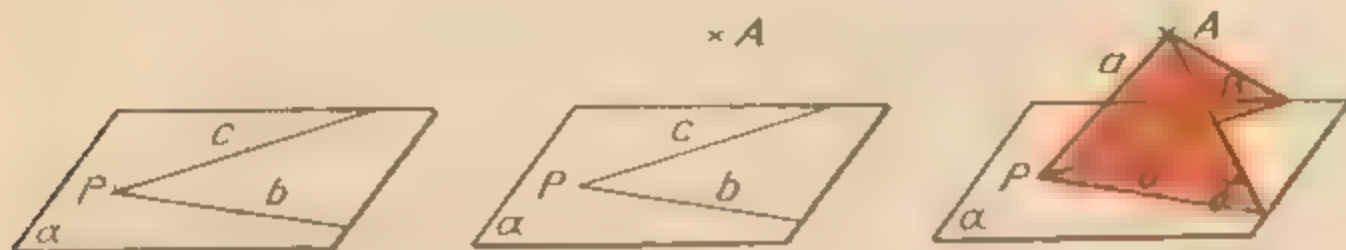


Fig. 3 2

un punct comun și numai unul ( $P$ ). Dacă ar mai avea unul, s-ar ajunge la concluzia că  $a, b, c$  coincid, ceea ce este imposibil pentru că  $A$  nu este conținut în planul  $\alpha$ .

Mai departe vom vedea că *un plan este perpendicular pe două plane diferite care se intersectează în dreapta  $d$ .* Pentru aceasta va trebui să demonstrăm câteva teoreme ajutătoare.

**Teoremă.** *Prin orice punct  $A$  există un singur plan paralel cu el*

**Existența.** Prin punctul dat se duc două drepte distincte paralele cu planul, iar planul determinat de aceste drepte este cel căutat.

**Unicitatea.** Să presupunem că prin  $A$  trec două plane distincte ( $\beta$  și  $\gamma$ ) paralele cu  $\alpha$  (fig. 3.3). Ele, avind un punct comun ( $A$ ), au o dreaptă comună. Fie  $d$  această dreaptă ( $d \parallel \alpha$ ). În planul  $\alpha$ , considerăm două puncte,  $B$  și  $C$ ,

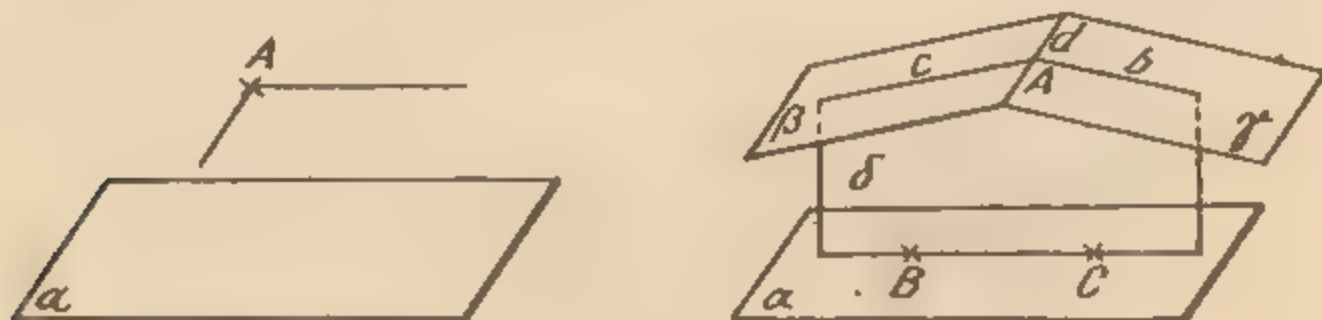


Fig. 3.3

astfel încât dreapta lor să nu fie paralelă cu  $d$  (alegerea acestor puncte este simplă: ducem prin  $B$  o dreaptă  $d'$   $\perp d$  și punctul  $C$  îl luăm nesituat pe  $d'$ ). Punctele  $A, B, C$  determină un plan  $\delta$ , care taie planele  $\beta$  și  $\gamma$  după dreptele  $c$  și  $b$  ( $c \perp BC$  și  $b \parallel BC$ ). Există două posibilități: dreptele  $c$  și  $b$  sau să fie în prelungire, sau diferite. Dacă ar fi în prelungire, atunci ar aparține ambelor plane ( $\beta$  și  $\gamma$ ) și deci s-ar confunda cu  $d$ , ceea ce este imposibil întrucât, prin construcție,  $d$  nu este paralelă cu  $BC$ . Dacă  $b$  și  $c$  ar fi diferite, ele trebuind să fie paralele cu  $BC$ , s-ar contrazice postulatul lui Euclid. Unicitatea este deci demonstrată.

**Teoremă.** *Dacă două plane sunt paralele cu un al treilea plan, atunci și ele sunt paralele între ele*

Fie  $\alpha \parallel \beta$  și  $\beta \parallel \gamma$ . Dacă  $\alpha$  și  $\gamma$  n-ar fi paralele, ar însemna că au cel puțin un punct  $B$  comun. Or, prin  $B$  trece un singur plan paralel cu  $\beta$ , ar însemna că  $\alpha$  și  $\gamma$  nu ar fi distincte. Deci s-ar contrazice presupunerea că  $\alpha$  și  $\gamma$  sînt distincte. Această teoremă ne demonstrează implicit că există trei plane paralele (care n-au, două câte două, nici un punct comun). Dar să construim efectiv trei plane distincte paralele între ele.

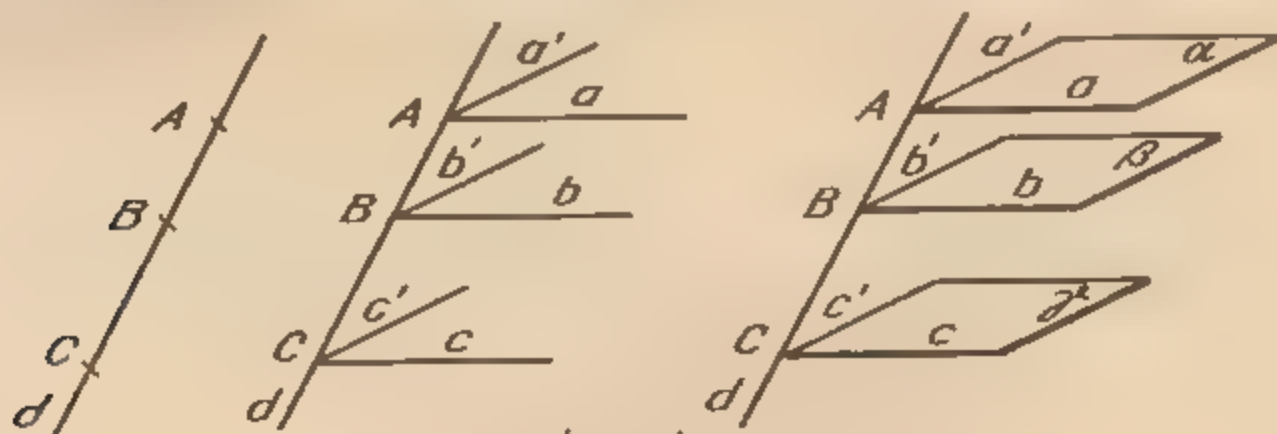


Fig. 3.4

Iată cum: pe dreapta  $d$  considerăm punctele distincte  $A, B$  și  $C$  (fig. 34). Ducem prin ele respectiv dreptele  $a, b, c$  și  $a' \parallel b' \parallel c'$  ( $a$  și  $a'$  diferite). Planele  $\alpha, \beta, \gamma$  determinate de  $a, a'$  de  $b, b'$  și de  $c, c'$  sînt paralele și distincte. Mai dăm următoarea teoremă utilă în demonstrații:

**Teoremă.**

*Demonstrație.* Cu notațiile din figura 35, presupunem că  $\alpha \parallel \beta$  și că  $\gamma$  taie pe  $\alpha$  după dreapta  $a$ . Dacă  $\gamma$  nu ar tăia și pe  $\beta$ , ar însemna că printr-un punct  $A \in a$ , s-ar putea duce două plane ( $\alpha$  și  $\gamma$ ) paralele la  $\beta$ , ceea ce este

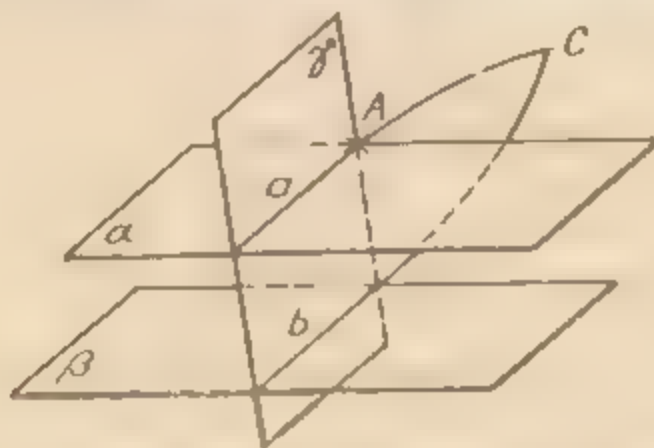


Fig. 35

absurd. De  $\gamma \cap \beta = b$ . Mai departe, dreptele  $a$  și  $b$  sînt coplanare. Dacă n-ar fi paralele, ar însemna că ar avea un punct comun  $C'$ . Or  $C'$ , aparținînd dreptelor  $a$  și  $b$ , ar aparține și planelor  $\alpha$  și  $\beta$ , în care aceste drepte sînt respectiv conținute. Ar însemna că  $\alpha$  și  $\beta$  nu ar fi paralele. Ceea ce este absurd!

**Teoremă.**

Înainte de a face însă demonstrația, ar trebui să ne asigurăm că astfel de plane există, acest fapt rezultă din teorema de la pagina 17.

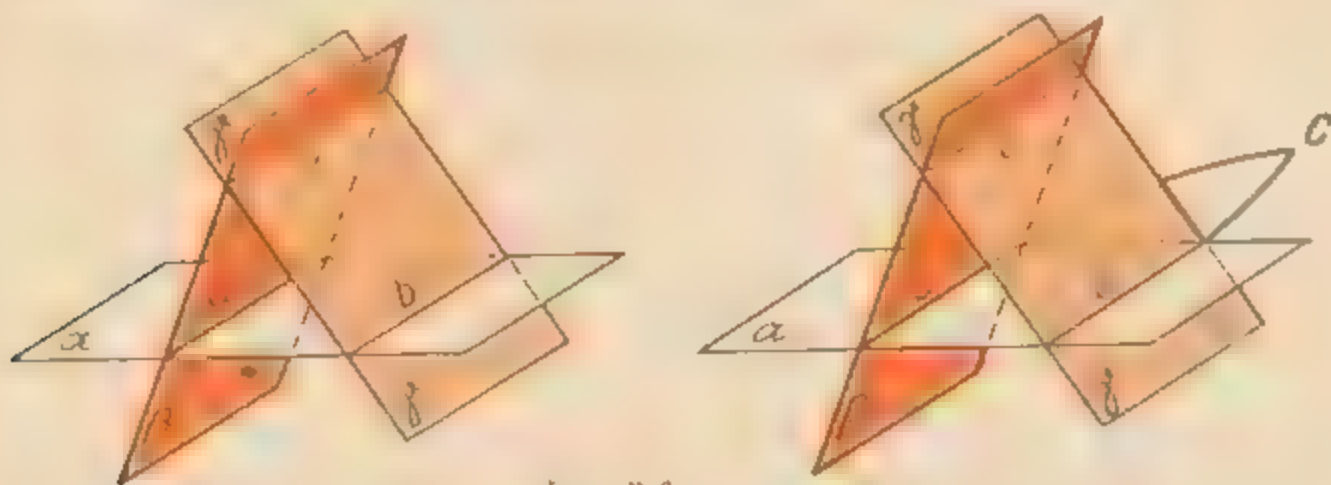


Fig. 36

*Demonstrație.* Cu notațiile din figura 36, dacă de pildă  $a$  și  $b$  n-ar fi paralele, ar trebui să se întâlnească într-un punct  $C'$ , care ar aparține deci tuturor celor trei plane  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$ , ceea ce contrazice ipoteza.



1. Două drepte paralele cu același plan sînt neapărat paralele între ele?
2. Se dau două drepte necoplanare  $a$  și  $b$  și un punct  $C$ . Să se ducă prin  $C$  o dreaptă coplanară atât cu  $a$  cît și cu  $b$ .
3. Dacă dreptele  $d$  și  $g$  sînt paralele și  $g$  este paralelă cu planul  $\alpha$ , atunci și dreapta  $d$  este paralelă cu planul  $\alpha$  (sau conținută în el).
4. Dîndu-se punctele  $A, B, C, D$  necoplanare, segmentele  $AB, BC, CD, DA$  alcătuiesc ceea ce se cheamă un patrulater strîmb,  $AC$  și  $BD$  sînt diagonalele lui. Intersecțiind laturile sale cu un plan paralel cu o diagonală, stabiliți natura poligonului convex cu vîrfurile în aceste puncte de intersecție.
5. Dacă două drepte paralele  $a$  și  $b$  sînt tăiate de un plan variabil, în punctele  $A$ , respectiv  $B$ , să se găsească locul geometric al mijlocului segmentului  $AB$ .
6. Prin două drepte paralele  $d$  și  $g$  trec două plane  $\alpha$  și  $\beta$  tăiate de un al treilea plan  $\gamma$ . În ce condiții dreptele  $a = \alpha \cap \gamma$  și  $b = \beta \cap \gamma$  sînt paralele?
7. Dacă  $d$  și  $g$  sînt două drepte necoplanare, atunci există un plan și numai unul care să conțină pe  $d$  și să fie paralel cu  $g$ .
8. Știm că un plan taie două plane paralele după două drepte paralele. Formulați o reciprocă și cercetați dacă este adevărată.
9. Două triunghiuri  $ABC$  și  $ACD$  au laturile  $AB$  și  $AD$  conținute într-un plan  $\alpha$ . Fie  $M \in AC$ , astfel ca  $AM = MC$ . Paralela prin  $M$  la  $AB$  intersectează dreapta  $BC$  în punctul  $N$ . Paralela prin  $M$  la  $AD$  intersectează dreapta  $CD$  în punctul  $P$ . Stabiliți poziția planelor  $(ABD)$  și  $(MNP)$ .
10. Se dau trei plane paralele  $\alpha, \beta, \gamma$  și punctele  $A, B$  în planul  $\alpha$ , iar  $C, D$  în planul  $\beta$ . Dreptele  $AC, BC, BD, AD$  taie planul  $\gamma$  în punctele  $E, F, G, H$ . Să se arate că figura  $EFGH$  este un paralelogram.
11. Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare și  $M, N, P, Q, R, S$ , mijloacele segmentelor  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$  (în această ordine). Să se arate că:
  - a)  $MNPQ$  este paralelogram;
  - b)  $MRPS$  este paralelogram;
  - c)  $NRQS$  este paralelogram;
  - d) dreptele  $MP, NQ$  și  $RS$  sînt concurente.
12. Fie patru puncte necoplanare  $A, B, C, D$  și  $M, N, P, Q$  mijloacele respective ale segmentelor  $AB, BC, CD, DA$ . Arătați că  $M, N, P, Q$  sînt coplanare.
13. Două plane paralele cu două drepte coplanare sînt paralele între ele? Adăugați o condiție în enunț pentru ca el să devină afirmativ.
14. Se dau dreptele  $a$  paralelă cu  $b$  și  $c$  neparalelă cu ele și necoplanară cu nici una din ele. Punctul  $A$  parcurge dreapta  $c$ . Planele determinate de  $a$  și  $A$  și de  $b$  și  $A$  se taie după o dreaptă  $d$ . Aflați locul geometric al punctelor dreptei  $d$ .

# ALTE TEOREME DE PARALELISM

## 1. Segmente paralele între plane paralele\*.

*Demonstrație.* Planele paralele sînt  $\alpha$  și  $\beta$ , dreptele paralele sînt  $d$  și  $g$  (fig. 4.1). Planul  $(d, g)$  intersectează pe  $\alpha$  și pe  $\beta$  după două drepte paralele ( $AB$  și  $DC$ ). Rezultă că patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram, deci  $BC \equiv AD$ .

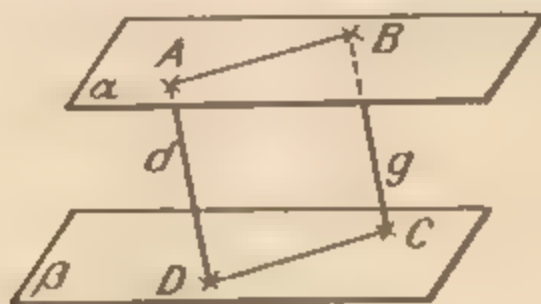


Fig. 4.1

## 2. Teorema lui Thales în spațiu.

*Demonstrație.* Fie  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  trei plane paralele, distincte două câte două, și fie  $d_1$  și  $d_2$  două drepte distincte, care taie cele trei plane în punctele  $A_1, B_1, C_1$  respectiv  $A_2, B_2, C_2$  (fig. 4.2).

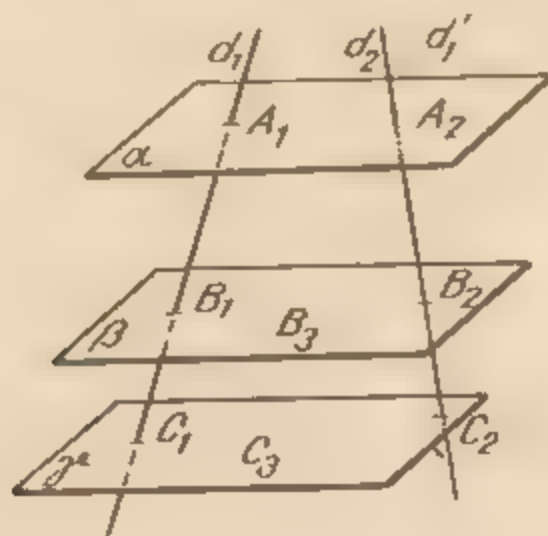
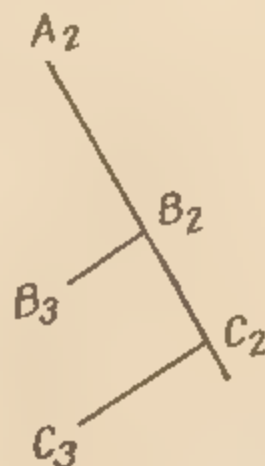


Fig. 4.2



\* Folosim această denumire, deși improprie, pentru că este intrată în uz. Este improprie pentru că s-ar putea ivi cazul din figura 4.3.



Fig. 4.3

Ducem prin  $A_2$  o paralelă  $d_1$  la dreapta  $d_1$  și fie  $B_3$  și  $C_3$  intersecțiile dreptei  $d_1$  cu planele  $\beta$  și  $\gamma$ .

Astfel, în triunghiul  $A_2C_2C_3$ , segmentul  $B_2B_3$  este paralel cu  $C_2C_3$  și putem scrie deci:

$$\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \text{ Rezultă. } \frac{A_2B_2}{A_2B_2} = \frac{B_2C_2}{B_2C_2}.$$

Însă  $A_2B_2 \equiv A_1B_1$  și  $B_2C_2 \equiv B_1C_1$ . Rezultă că  $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$ .

*Observație* În enunțul teoremei am vorbit despre „mai multe plane paralele” și nu despre trei plane așa cum apare în demonstrație. Dacă am avea doar două plane, atunci raportul  $\frac{A_2B_2}{A_1B_1}$  nu am avea cu cine să-l comparăm. Dacă am avea mai mult decît trei plane paralele, am obține un șir de rapoarte egale (numărul de rapoarte fiind egal cu numărul planelor micșorat cu 1).

3.

Fie  $\angle xOy$  și  $\angle x'O'y'$  două unghiuri necoplanare, cu laturile respectiv paralele  $Ox \parallel O'x'$  și  $Oy \parallel O'y'$  și astfel încît  $Ox, O'x'$  să fie în același semiplan determinat de dreapta  $OO'$ , la fel și  $Oy$  cu  $O'y'$ . Să demonstrăm că  $\angle xOy \equiv \angle x'O'y'$  (fig. 4.4).

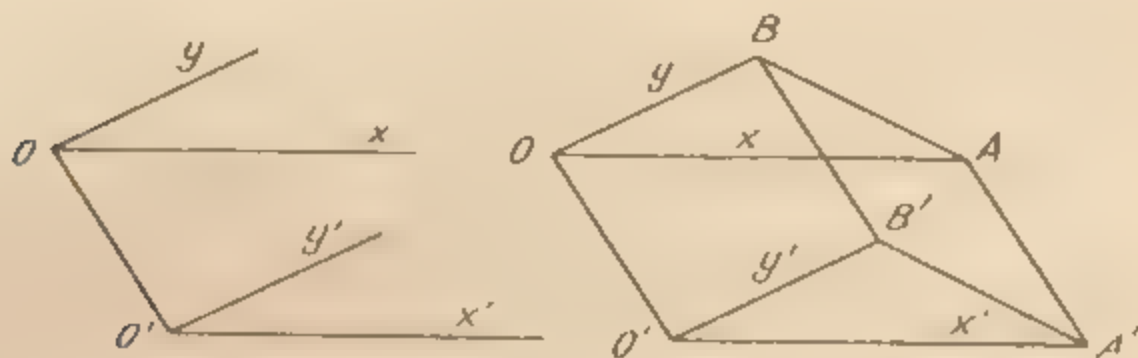


Fig. 4.4

Vom lua pe laturile paralele segmentele  $OA \equiv O'A'$ , ( $OA \equiv a$ ) și  $OB \equiv O'B'$ , ( $OB \equiv b$ ). Afirmăm că triunghiurile  $OAB$  și  $O'A'B'$  sînt congruente. Într-adevăr, patrulaterul  $AOO'A'$  este paralelogram, avînd laturile  $OA$  și  $O'A'$  congruente și paralele. La fel și  $BOO'B'$  este paralelogram. De aici rezultă că și  $ABB'A'$  este paralelogram, avînd două laturi  $AA'$  și  $BB'$  paralele și congruente. Rezultă că  $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$  (avînd laturile respectiv congruente), deci  $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$  și propoziția este demonstrată.

Dacă numai o pereche dintre laturile paralele se află în semiplane diferite față de  $OO'$  se demonstrează ușor că unghiurile sînt suplementare (fig. 4.5). Putem deci afirma:



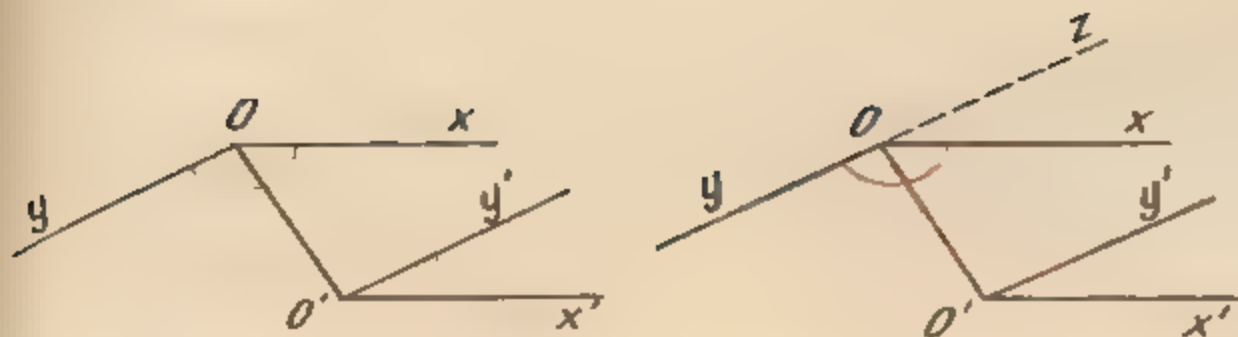


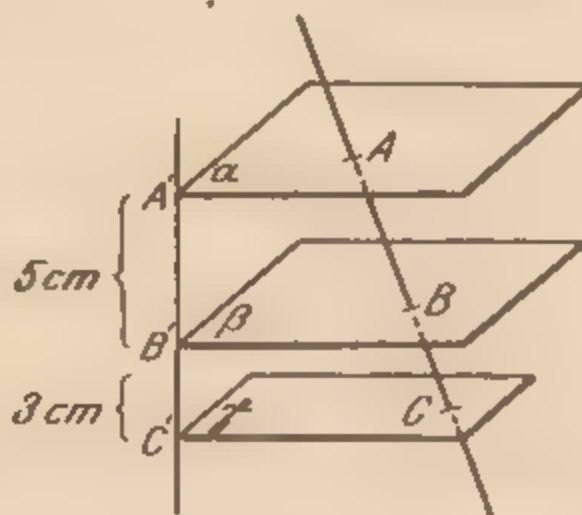
Fig. 4.5

**Teoremă.** Dacă două plane sînt paralele și sînt intersectați de o dreaptă, atunci secantele sînt paralele și congruente.

#### PROBLEME 4

1. În figura 4.6, planele  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sînt paralele și  $A'C'$ ,  $AC$  sînt două secante. Știind că  $A'B' = 5$  cm,  $B'C' = 3$  cm și  $AC = 12$  cm, calculați  $AB$  și  $BC$ .

Fig. 4.6



2. Se dă o dreaptă  $d$  și un punct  $A$ , exterior ei. Se consideră mulțimea planelor care trec prin  $A$  și sînt paralele cu  $d$ . Să se arate că aceste plane au o dreaptă comună.

3. Fie planul  $\alpha$  și un punct exterior lui,  $A$ . Care este locul geometric al mijlocului segmentului  $AB$ , cînd  $B$  parcurge  $\alpha$ ?

4. Fie planul  $\alpha$  și dreapta  $d \parallel \alpha$ . Dacă  $A$  parcurge  $d$  și  $B$  este punctul curent (poate ocupa orice poziție) în  $\alpha$ , care este locul geometric al mijlocului segmentului  $AB$ ?

5. Se dau două drepte neconcurente în spațiu,  $d$  și  $g$ . Care este locul geometric al mijlocului segmentului  $OG$  unde  $D \in d$ ,  $G \in g$ , cînd: a)  $d \parallel g$ ; b)  $d$  și  $g$  sînt necoplanare.

6. Aceeași problemă, dacă în loc de dreptele  $d$  și  $g$  se dau segmentele  $AB$  și  $PQ$ : a)  $AB \parallel PQ$ , b)  $AB$  necoplanar cu  $PQ$ .

7. Demonstrați că dacă patru drepte paralele determină, pe un plan dat, vîrfurile unui paralelogram, atunci determină pe orice plan care le taie vîrfurile unui paralelogram.

8. Arătați că dacă două drepte concurente se intersectează cu două plane paralele în punctele  $A$ ,  $B$  și respectiv  $C$ ,  $D$ , astfel încît patrulaterul  $ABCD$  să fie inscriptibil, atunci acesta este fie dreptunghi, fie trapez isoscel.

9. Dacă două plane paralele determină pe două secante segmente congruente, aceste secante sînt paralele? Justificați răspunsul dat.

10. Se dau trei drepte concurente în spațiu, care intersectează trei plane paralele.  
 a) Să se arate că punctele de intersecție ale dreptelor cu planele, formează, în fiecare plan, un triunghi și că cele trei triunghiuri sînt asemenea.  
 b) Centrele de greutate ale acestor triunghiuri sînt coliniare.  
 c) Centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor sînt, de asemenea, coliniare.

11. Se consideră două plane paralele  $\alpha$  și  $\beta$ . Se iau  $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$  și apoi un punct  $C$  pe segmentul  $AB$  așa încît  $\frac{AC}{CB} = 3$ . Ce figură descrie  $C$

cînd  $A$  și  $B$  parcurg  $\alpha$  și respectiv  $\beta$ ?

12\*. Linia frîntă închisă  $ABCD$  este tăiată de planul  $\theta$  în punctele  $M, N, P, Q$  ( $M \in AB, N \in BC, P \in CD, Q \in DA$ ). Ducînd prin  $A, B, C, D$  respectiv planele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  paralele cu  $\theta$  și apoi o dreaptă  $d$ , care taie aceste plane în  $A', B', C', D'$ , să se deducă relația

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DQ}{QA} = 1$$

(Vezi figura 4.7).

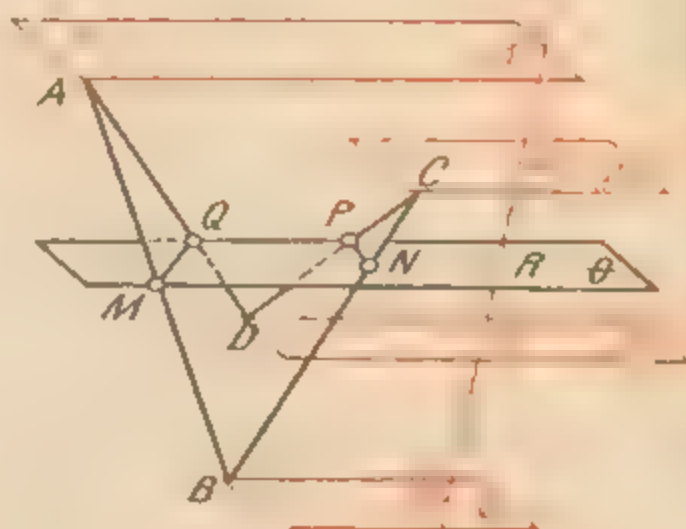


Fig. 4.7

## PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

### Drepte perpendiculare

Știm ce înseamnă drepte perpendiculare conținute în același plan.

Fie  $a, b$  două drepte, în general necoplanare. Fie  $P$  un punct oarecare în spațiu. Să ducem prin  $P$  dreptele  $a'$  și  $b'$ , paralele respectiv cu  $a$  și  $b$ . Dacă  $P'$  este un alt punct în spațiu, să ducem și prin el dreptele  $a'' \parallel a, b'' \parallel b$ . Avem  $a'' \parallel a'$  și  $b'' \parallel b'$ ; teorema asupra unghiurilor cu laturi paralele arată că  $a' \perp b'$ , dacă și numai dacă,  $a'' \perp b''$ . Ajungem la:

**Definiție.** Două drepte  $a, b$  în spațiu se numesc perpendiculare dacă și numai dacă dreptele paralele cu ele care trec printr-un punct  $P$  din spațiu sînt perpendiculare. Scriem  $a \perp b$  (fig. 5.1).

Fig. 5.1.



Am văzut mai sus că dacă aceasta se întîmplă relativ la un punct  $P$ , atunci același lucru este valabil relativ la orice punct din spațiu.

## Dreapta perpendiculară pe un plan

Pentru a explica această noțiune vom căuta să arătăm că, dându-se o dreaptă  $a$  și un punct  $A \in a$ , există un plan  $\alpha$  care să treacă prin punctul  $A$ , astfel încât orice dreaptă a acestui plan să fie perpendiculară pe dreapta  $a$ .

Vom considera două plane  $\beta$  și  $\gamma$ , care conțin dreapta  $a$ , și vom duce în fiecare din ele două drepte  $b$  ( $b \subset \beta$ ) și  $c$  ( $c \subset \gamma$ ), perpendiculare în  $A$  pe dreapta  $a$ . Planul determinat de dreptele  $b$  și  $c$  este cel căutat (fig. 5.2).

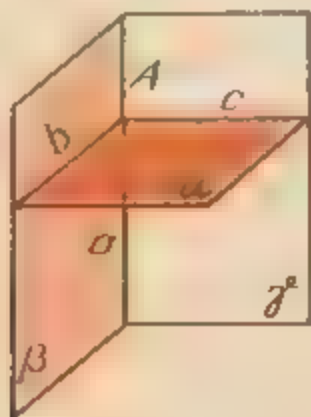


Fig. 5.2

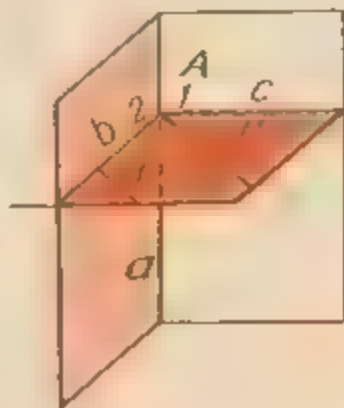


Fig. 5.3

Vom demonstra acest fapt. Pentru dreptele din  $\alpha$  paralele cu  $b$  sau cu  $c$ , este evident, unghiurile lor cu  $a$  fiind chiar unghiurile drepte  $A_1$  sau  $A_2$  din figura 5.3.

Să demonstrăm acest lucru pentru o dreaptă oarecare  $d \subset \alpha$ , care nu este paralelă cu nici una din dreptele  $b$  și  $c$  (fig. 5.3).

Ducem prin  $A$  o paralelă  $d'$  la această dreaptă. Se arată ușor că ea este conținută în planul  $\alpha$ .

Alegem o altă dreaptă în planul  $\alpha$ , care nu trece prin  $A$  și care taie dreptele  $b$ ,  $c$ ,  $d'$  în  $B$ ,  $C$ ,  $F$ . Putem presupune că  $F$  se află între  $B$  și  $C$ .

Luăm pe  $a$  două puncte  $E$  și  $E'$ , de o parte și de alta a lui  $A$ , așa încât  $AE = AE'$ .

Avem  $EB = E'B$ ,  $EC = E'C$ , din perechile de triunghiuri dreptunghice congruente  $EAB$ ,  $E'AB$  și  $EAC$ ,  $E'AC$  (fig. 5.4).

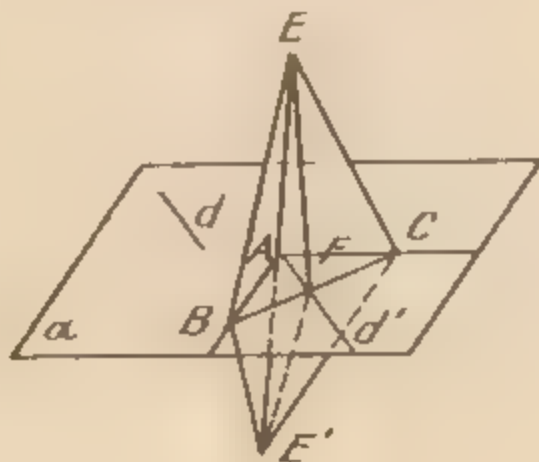


Fig. 5.4



Deci triunghiurile  $EBC$ ,  $E'BC$  sînt congruente (au toate laturile respectiv congruente) și deducem  $\sphericalangle EBC = \sphericalangle E'BC$ .

Aceasta permite să afirmăm că triunghiurile  $EBF$  și  $E'BF$  sînt congruente (au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente). Rezultă  $EF = E'F$ , adică triunghiul  $EFE'$  este isoscel; în el, mediana  $FA$  va fi înălțime, ceea ce reprezintă concluzia dorită:  $d' \perp a$ , adică  $d \perp a$ .

*Printr-un punct  $A$  al unei drepte  $a$  trece deci un plan astfel încît orice dreaptă conținută în acest plan să fie perpendiculară pe dreapta  $a$ .*

Ne propunem acum următoarea problemă: Printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce un plan care să aibă toate dreptele, conținute în el, perpendiculare pe dreapta inițială?

Răspunsul este afirmativ. Presupunem dată dreapta  $a$  și punctul  $A$  exterior ei (fig. 5.5).

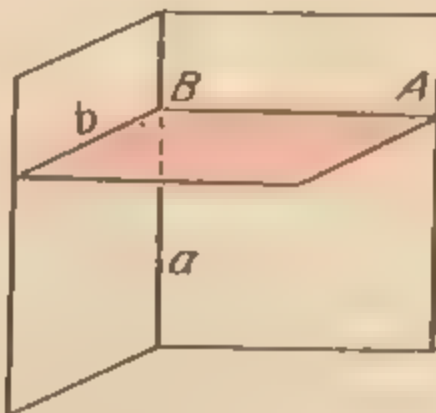


Fig. 5.5.

În planul determinat de dreapta  $a$  și de punctul  $A$ , ducem dreapta  $AB$  perpendiculară pe dreapta  $a$  ( $B \in a$ ). Într-un plan care conține pe  $a$ , dar este diferit de planul  $(a, A)$ , ridicăm din  $B$  o perpendiculară  $b$  pe  $a$ . Dreptele  $AB$  și  $b$  determină un plan care îndeplinește, conform celor arătate mai sus, condițiile cerute, trecînd prin  $B \in a$  și conținînd două drepte neparalele perpendiculare pe  $a$ .

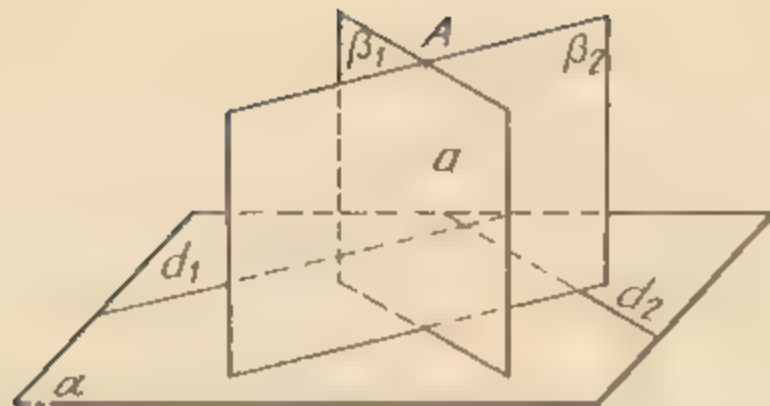
Vom demonstra acum următoarea

**Teoremă.** *Dintr-un punct exterior unui plan, se poate construi o dreaptă perpendiculară pe două drepte neparalele situate în planul dat.*

**Demonstrație.** Fie  $A$  punctul exterior planului  $\alpha$  dat și fie  $d_1$  și  $d_2$  două drepte neparalele conținute în planul  $\alpha$  (fig. 5.6).

Ducem prin punctul  $A$  planul  $\beta_1$  care să aibă toate dreptele, conținute în el, perpendiculare pe  $d_1$ . Ducem prin  $A$  planul  $\beta_2$  care să aibă toate dreptele, conținute în el, perpendiculare pe  $d_2$ . Planele  $\beta_1$  și  $\beta_2$ , avînd un punct comun  $A$ , au o dreaptă comună  $a$ , care este perpendiculară, deci, și pe  $d_1$  și pe  $d_2$ . Cum  $d_1$  și  $d_2$  nu sînt paralele, urmează că dreapta  $a$  este perpendiculară pe orice dreaptă a planului  $\alpha$ .

Fig. 5.6



Putem da deci următoarea:

**Definiție.**

*Prin două drepte neparalele conținute în acel plan*

Din cele demonstrate anterior rezultă că:

*în planul*

**Teoremă.**

*Prin două drepte*

**Demonstrație. Cazul 1** Punctul  $M$  aparține planului  $\alpha$ . Să presupunem, prin absurd, că prin punctul  $M$  am putea duce două perpendiculare  $d_1$  și  $d_2$  pe planul  $\alpha$ . Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  determină un plan  $\beta$ . Fie  $a$  dreapta de intersecție a planelor  $\alpha$  și  $\beta$ . Dreptele  $d_1$  și  $d_2$ , presupuse perpendiculare pe planul  $\alpha$ , vor fi, deci, perpendiculare și pe dreapta  $a \subset \alpha$  (fig. 5.7).

Problema devine o problemă de geometrie în plan: În planul  $\beta$ , în punctul  $M$ , s-ar putea duce două perpendiculare în acest punct pe dreapta  $a$ . Or acest lucru este imposibil. Deci relația  $d_1 \neq d_2$  este absurdă. Rezultă că prin punctul  $M$ , al planului  $\alpha$ , se poate duce pe acesta o perpendiculară și numai una.

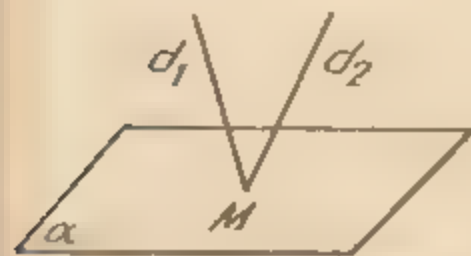


Fig. 5.7

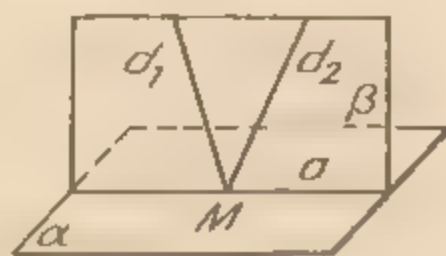
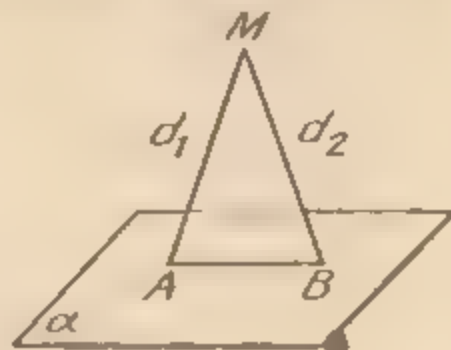


Fig. 5.8



**Cazul 2.** Punctul  $M \notin \alpha$  Presupunem că putem duce prin punctul  $M$  dreptele  $d_1$  și  $d_2$  perpendiculare pe planul  $\alpha$  (fig. 5.8). Fie  $A$  și  $B$  picioarele acestor perpendiculare. Ar urma că triunghiul  $AMB$  are două unghiuri drepte, ceea ce este absurd.

## Teoremă.

**Demonstrație.** Fie  $\alpha$  planul perpendicular pe  $d$  în punctul  $A$  (fig. 5.9).

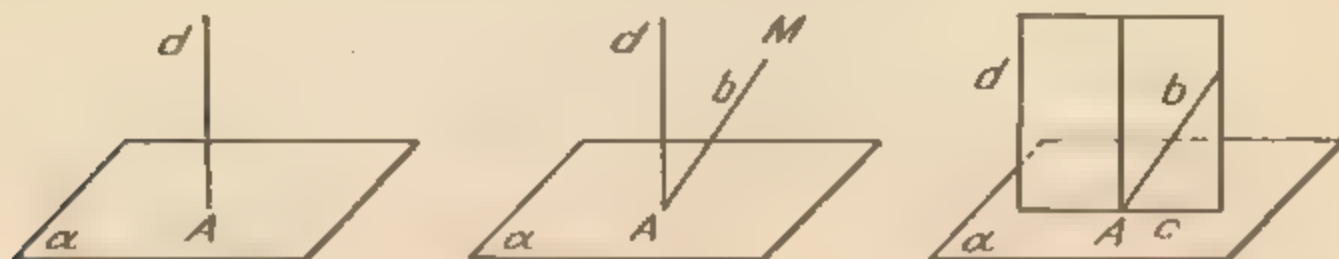


Fig. 5.9

Orice dreaptă din  $\alpha$  este perpendiculară pe  $d$ . În particular, toate cele care trec prin  $A$  și sînt conținute în  $\alpha$ .

Presupunem că există un punct  $M \notin \alpha$ , astfel încît dreapta  $MA = b$  și  $b \perp d$ , deci, că există o dreaptă  $b$  ( $b \perp d$  și  $b \not\subset \alpha$ ) și  $A \in b$ .

Fie planul  $(d, b)$ , care taie  $\alpha$  după dreapta  $c$ . Pentru că  $d \perp \alpha$  și  $c \subset \alpha$ , rezultă că  $d \perp c$ . Deci, în planul  $(d, b)$ , ar rezulta că se pot duce două drepte  $b$  și  $c$  perpendiculare într-un punct  $A$  pe aceeași dreaptă  $d$ , ceea ce este imposibil.

## PROBLEME 5

1. Se dau dreptele paralele  $a, b, c$  și un punct  $O$ , nesituat pe ele. Ducem din  $O$  perpendicularele  $OA, OB, OC$  respectiv pe  $a, b, c$  ( $A \in a, B \in b, C \in c$ ). Sînt dreptele  $OA, OB, OC$  coplanare?

2. Se dau punctele  $A$  și  $B$ . Prin  $A$  trec dreptele  $a, a', a''$ , iar prin  $B$  trec dreptele  $b, b', b''$ , perpendiculare și concurente respectiv cu primele, în  $C, C', C''$ . Să se arate că există un punct  $O$ , astfel încît segmentele  $OA = OB = OC = OC' = OC''$ .

3. O dreaptă  $d$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ . Două drepte  $a$  și  $b$  sînt concurente și paralele cu  $\alpha$ . Este dreapta  $d$ , perpendiculară pe planul lor?

4. Fie  $OA$  și  $OB$  două drepte perpendiculare. Un plan  $\alpha$  ce conține dreapta  $OA$  intersectează un alt plan  $\beta$  după dreapta  $g$ . Stabiliți dacă dreptele  $OB$  și  $g$  sînt perpendiculare.

5. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Pe  $AB$  ca latură se construiește dreptunghiul  $ABMN$ , ( $MN \not\subset (ABC)$ ). Stabiliți poziția dreptei  $AB$  față de planul  $(ACN)$ .

6. Să se determine locul geometric, în spațiu, al punctelor egal depărtate de două puncte distincte  $A$  și  $B$  date.



7. Se dau trei puncte necoliniare. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor din spațiu, egal depărtate de cele trei puncte, este o dreaptă.

8. Se dau patru puncte necoplanare. Să se demonstreze că există un punct egal depărtat de ele și să se determine acest punct.

9. Pe planul triunghiului  $ABC$  cu  $AB = 7$  cm, se duc perpendicularele  $AA' = 7$  cm și  $BB' = 7$  cm. Dacă  $A'C = B'C$ ,  $A'C = 7\sqrt{2}$  cm, arătați că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

10. Pe planul triunghiului  $ABC$  se ridică perpendiculara în  $B$ . Pe aceasta se ia un punct  $B'$ , astfel încât  $BB' = AB = AC$ , ( $AB = a$ ). Dacă  $B'C = a\sqrt{2}$ , arătați că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

11. Un triunghi dreptunghic variabil  $ABC$ , cu unghiul  $A = 90^\circ$ , are vîrfurile  $A$  și  $B$  fixe și cateta  $AC$  de lungime constantă. Care este locul geometric al vîrfului  $C$ ?

12. Fie, într-un plan  $\alpha$ , un hexagon regulat,  $ABCDEF$ , de latură 4 (puteți lua orice unitate de măsură 4 m, 4 dm, 4 km etc.) În punctele  $A, B, C, D$  se ridică perpendicularele  $AA', BB', CC', DD'$ , pe planul său, de lungimi: 1, 4, 2, 7 (în această ordine). Să se afle distanțele  $A'B', A'C', A'D', B'C', B'D', C'D'$ .

13. Într-un punct  $A$ , al unui cerc de centru  $O$ , se duce perpendiculara pe planul cercului pe care se ia un punct  $A'$  astfel încît  $AA' = 5$  m. Știind că distanța  $A'O = 13$  m,

a, să se afle raza cercului;

b, locul geometric al lui  $M$ , mijlocul lui  $A'O$ , cînd  $A$  descrie cercul.

14. Pe planul dreptunghiului  $ABCD$  se construiesc perpendicularele în  $A, B, D$ , pe care se iau segmentele  $AA' = 19$  cm,  $BB' = 14$  cm,  $DD' = 23$  cm. Dacă  $A'B' = 13$  cm, și  $A'D' = 5$  cm, găsiți laturile dreptunghiului  $ABCD$ .

15. Să se găsească locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de punctele unui cerc.

16. Să se găsească locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de vîrfurile unui pătrat.

17. În ce caz se poate duce printr-o dreaptă  $a$ , dată, un plan perpendicular pe o altă dreaptă dată  $b$ .

18. Să se demonstreze că dacă două drepte  $d_1$  și  $d_2$  sînt perpendiculare, fără să fie situate în același plan, toate dreptele care întîlnesc pe  $d_1$  și sînt perpendiculare pe  $d_2$  sînt conținute în același plan.

19. Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  fiind date, în ce caz există un plan care conține pe  $d_2$  și este perpendicular pe  $d_1$ ?

20\*. Dacă dreapta  $d$ , care trece prin punctul  $A$  al planului  $\alpha$ , nu este perpendiculară pe  $\alpha$ , atunci există o dreaptă  $a$ , conținută în  $\alpha$ , și numai una, perpendiculară în  $A$  pe  $d$ .

## Teorema celor trei perpendiculare

treia dreaptă  $b$ .

*Demonstrație.* Se dă  $d \perp \alpha$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $a \perp b$  și se cere să se arate că  $c \perp b$  (fig. 6.1) Dreapta  $b$ , fiind conținută în planul  $\alpha$ , este perpendiculară pe  $d$ . Dar  $b$  este perpendiculară și pe  $a$ , deci  $b$  este perpendiculară pe planul determinat de  $a$  și  $d$ . Este, prin urmare, perpendiculară pe orice dreaptă conținută în acest plan ( $a$ ,  $d$ ). Cum dreapta  $c$  are două puncte ( $M$  și  $P$ ) în acest plan, deci este conținută în el, rezultă că dreapta  $b$  este perpendiculară pe  $c$ .

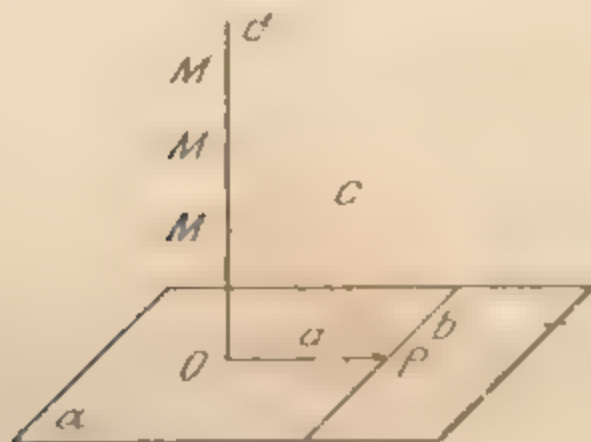


Fig. 6.1

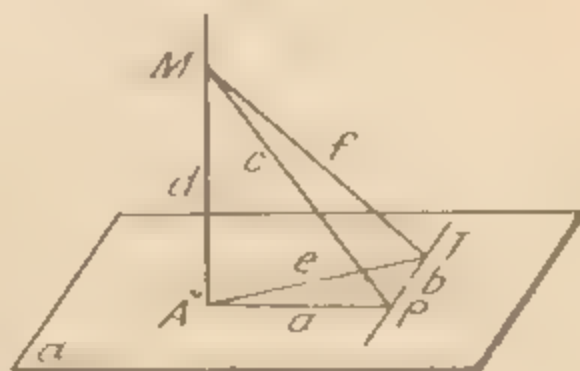


Fig. 6.2

*Altă demonstrație* (notațiile fiind cele din figura 6.2 și literele mici reprezentând, de data aceasta, măsurile segmentelor și nu dreptele).

Luăm pe a treia perpendiculară un punct  $T$  ( $PT = b$ ) și, aplicând teorema lui Pitagora, în triunghiurile  $MAP$  și  $APT$ , avem:

$$d^2 = c^2 - a^2, \quad e^2 = a^2 + b^2; \quad f^2 = d^2 + e^2,$$

(unde  $f = MT$ ,  $e = AT$ ). Înlocuim, în a treia relație, pe  $d^2$  din prima relație și pe  $e^2$  din a doua relație și obținem  $f^2 = c^2 - a^2 + a^2 + b^2$  sau  $f^2 = c^2 + b^2$ . Din reciproca teoremei lui Pitagora rezultă că  $\angle MPT = 90^\circ$ .

## Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare

Ni se pare mai simplu să le formulăm folosind direct figura.

1) Se dă  $d \perp \alpha$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \alpha$ ,  $c \perp b$ . Se cere  $a \perp b$  (fig. 6.3).

*Demonstrație.* Dreapta  $b$  este perpendiculară pe planul triunghiului  $MAP$  pentru că este perpendiculară pe două drepte concurente din acest plan (pe  $d$  și pe  $c$ ). Dar  $a$  este conținută în planul triunghiului  $MAP$ . Rezultă că  $b \perp a$ .

2) Se dă  $d \perp \alpha$ ,  $a \subset \alpha$ ,  $b \perp a$ ,  $d \perp b$ . Se cere  $d \perp \alpha$ .

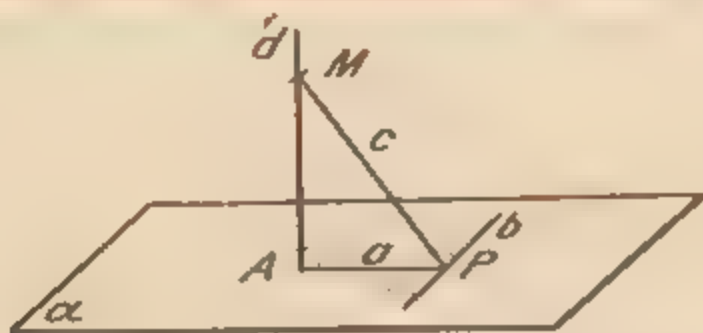


Fig. 6.3

*Demonstrație.* Dreapta  $b$  este perpendiculară pe planul triunghiului  $MAP$ , fiind perpendiculară pe  $c$  și pe  $a$ . Deci, este perpendiculară și pe  $d$ , care este conținută în planul lui  $MPA$ , având două puncte ( $M$  și  $A$ ) în acest plan. Deci  $d \perp b$ . Din ipoteză  $d \perp a$ , deci  $d \perp \alpha$  (pentru că  $\alpha$  conține atât pe  $a$  cât și pe  $b$ , concurente în  $P$ ).

*Exercițiu.* Încercați să demonstrați una din aceste reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare și prin reciproca teoremei lui Pitagora.

*Comentariu.* Cum se construiește perpendiculara dintr-un punct pe un plan, folosind teorema celor trei perpendiculare? Luăm o dreaptă  $b$  în planul  $\alpha$ . Fixăm piciorul  $P$  al perpendicularei din  $M$  pe  $b$ . Ducem apoi, în planul  $\alpha$ , perpendiculara  $a$  în  $P$  pe dreapta  $b$  (fig. 6.4).

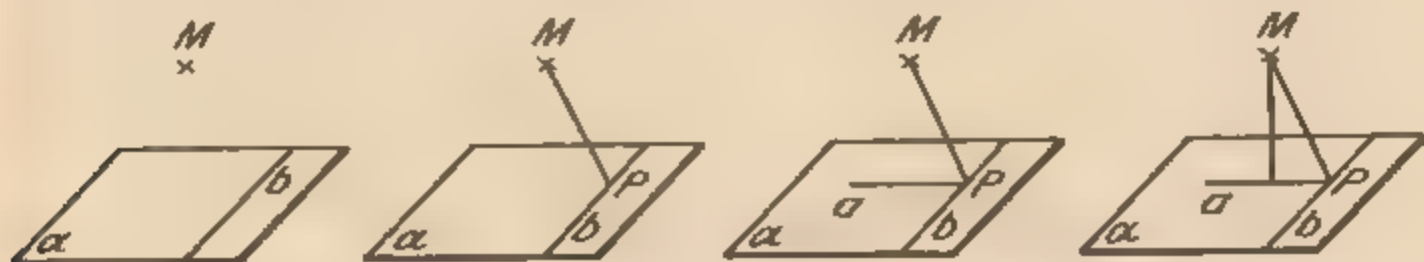


Fig. 6.4

Considerăm perpendiculara din  $M$  pe  $a$  (dusă în planul determinat de  $M$  și  $a$ ). Aceasta este dreapta căutată ( $MA$ ).



**Observație.** Acest procedeu, în comparație cu cel din construcția anterioară a perpendicularei pe un plan dintr-un punct exterior, nu folosește intersecții de plane, date prin elementele lor, ci numai construcția unui plan ce trece printr-un punct și o dreaptă dată.

Vom vedea că această construcție se va dovedi utilă în multe probleme de calcul.

*De ce apar două teoreme reciproce la teorema celor trei perpendiculare?*

Pentru că ipoteza este formată din două propoziții și am văzut, în clasa a VI-a, că, într-o astfel de situație, pot apărea două reciproce.

■

## PROBLEME 6

1. În vârful  $A$  al triunghiului dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia  $AM = 10$  cm. Știind că  $AB = 40$  cm și  $AC = 30$  cm, să se determine distanța lui  $M$  la  $BC$ .

2. Pe cercul  $(C)$  de centru  $O$  și rază  $r = 8$  cm se iau două puncte  $A$  și  $B$  astfel încât  $\widehat{AB} = 120^\circ$ . În  $O$  se ridică perpendiculara pe planul cercului pe care se ia  $OM = 3$  cm. Să se determine distanța lui  $M$  la dreapta  $AB$ .

3. Fie  $ABCD$  un dreptunghi cu laturile  $AB = 9$  cm și  $AD = 3$  cm. Fie  $E$  un punct pe diagonala  $AC$ , astfel încât  $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$ . În  $E$  se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia  $EF = 5$  cm. Să se determine distanța lui  $F$  la laturile dreptunghiului.

4. În vârful  $A$  al unui hexagon regulat de latură  $a$  se ridică o perpendiculară pe planul său, pe care se ia în segment  $AM = b$ . Să se calculeze distanțele lui  $M$  la laturile hexagonului dat.

5. Aceleași date de mai sus, să se calculeze distanțele lui  $M$  la diagonalele hexagonului.

6. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic isoscel ( $AB = AC$  și  $AB = a$ ). În punctul  $D$ , piciorul înălțimii din  $A$ , se ridică perpendiculara pe planul triunghiului pe care se ia un punct  $M$  astfel încât  $DM = b$ . Să se arate că triunghiul  $AMC$  este isoscel.

7. Pe planul unui cerc  $(C)$ , în centrul acestuia, se ridică perpendiculara pe care se alege un punct  $M$ . Să se arate că dreapta care unește pe  $M$  cu un punct  $N$  de pe cercul  $(C)$  este perpendiculară pe tangenta în  $N$  la cercul  $(C)$ .

8. Pe planul unui triunghi echilateral  $ABC$  de latură  $a$ , se ridică perpendicularele  $AA'$  și  $BB'$ . Se știe că  $BB' = a$ . Să se găsească  $AA'$  astfel încât

a. triunghiul  $A'B'C$  să fie dreptunghic ( $\hat{B} = 90^\circ$ );

b. triunghiul  $A'B'C$  să fie isoscel, cu  $A'B' = A'C$ .

9. O dreaptă  $d$  întâlnește un plan  $\alpha$  în punctul  $A$ . Pe  $d$  se ia un punct fix  $B$  și fie o dreaptă variabilă  $g$ , care trece prin  $A$  și este conținută în  $\alpha$ . Să se determine locul geometric al picioarelor perpendicularelor din  $B$  pe dreapta  $g$ .

10. Se dau o dreaptă fixă  $d$  și un punct fix  $A (A \notin d)$ . Un plan mobil  $\alpha$  conține dreapta  $d$ . Din  $A$  ducem perpendiculara  $AP$  pe planul  $\alpha$  ( $P \in \alpha$ ). Se cere:

- să se arate că  $P$  descrie o curbă coplanară;
- să se găsească locul geometric al punctului  $P$  în spațiu;
- ce descrie punctul  $P$  pe planul  $\alpha$ ?

11. Fie  $O$  un punct în planul triunghiului  $ABC$  și  $D$  un punct pe perpendiculara în  $O$  pe acest plan. Să se arate că dacă  $AD \perp BC$ , atunci  $O$  se află pe înălțimea din  $A$  a triunghiului  $ABC$ .

12. Fie  $H$  ortocentrul unui triunghi  $ABC$ . Pe perpendiculara  $h$ , în  $H$ , pe planul  $ABC$ , se ia un punct oarecare  $M$ . Să se arate că dacă  $A', B', C'$  sînt picioarele perpendicularor din  $M$  respectiv pe  $BC, AC$  și  $AB$ , atunci  $AA', BB'$  și  $CC'$  sînt înălțimile triunghiului  $ABC$ .

13. Fie  $A$  un punct al unui plan dat  $\alpha$  și  $d, g$  două drepte concurente în  $H$  ( $H \neq A$ ) conținute în  $\alpha$ . Pe perpendiculara în  $A$  pe planul  $\alpha$  se ia un punct  $B$ , din care se duc perpendiculararele  $BD$  și  $BG$ , respectiv pe  $d$  și  $g$  ( $D \in d, G \in g$ ). Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile  $H, A, G, D$  este inscriptibil.

## Plane perpendiculare

Fie un plan  $\alpha$  și o dreaptă  $d$  perpendiculară pe el (fig. 7.1). Ele au un punct comun  $A$ . (Afirmația este evidentă: dacă  $d$  nu ar înțepa planul în  $A$ , ar rezulta că  $d \parallel \alpha$ . În acest caz, ducînd prin  $d$  un plan  $\beta$ , neparalel cu  $\alpha$ , ar tăia planul  $\alpha$  după o dreaptă  $g (g \parallel d)$ . Deci în  $\alpha$  ar exista o dreaptă  $g$  care nu ar fi perpendiculară pe  $d$ , or  $d$ , fiind perpendiculară pe  $\alpha$ , este perpendiculară pe *orice* dreaptă din  $\alpha$ ). Prin  $d$ , ducem un plan  $\gamma$ . Spunem că planul  $\gamma$  este perpendicular pe planul  $\alpha$ .

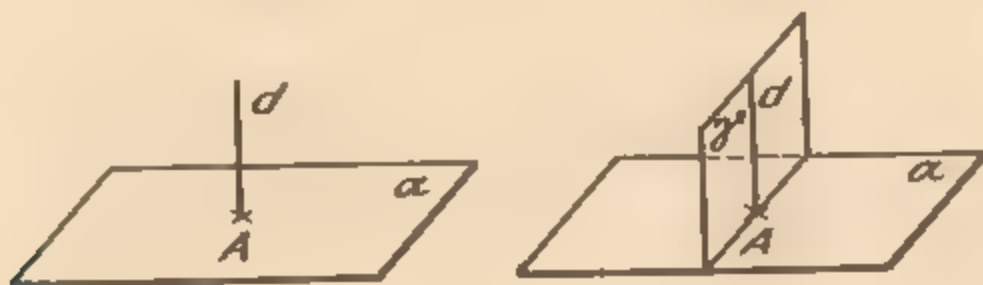


Fig. 7.1

Deci putem da următoarea:

**Definiție.** Dacă  $\gamma \perp \alpha$  și  $d \subset \gamma$ , atunci  $d$  se numește **dreaptă (d  $\subset \gamma$ ) perpendiculară pe acesta (d  $\perp \alpha$ )**.

Vom demonstra că dacă  $\gamma \perp \alpha$ , atunci și  $\alpha \perp \gamma$ . Notăm cu  $g$  intersecția planelor  $\alpha$  și  $\gamma$  ( $g = \alpha \cap \gamma$ ) (fig. 7.2). Ducem în planul  $\alpha$  perpendiculara  $a$  pe  $g$  în punctul  $A$ . (Deci  $a \subset \alpha$ ,  $a \perp g$ ,  $A \in a$ ). Dreapta  $a$  este perpendi-



Fig. 7.2

culară pe planul  $\gamma$  pentru că este perpendiculară pe două drepte ale sale  $a \perp g$ ,  $a \perp d$  ( $d$  se găsește în planul  $\gamma$  și este perpendiculară pe  $\alpha$ ). Cu alte cuvinte, planul  $\alpha$  conține dreapta  $a$  care este perpendiculară pe  $\gamma$ . Deci  $\alpha \perp \gamma$ . Am demonstrat astfel.

**Teorema.** Dacă  $\alpha \perp \beta$  și  $d \subset \alpha$ , atunci  $d \perp \beta$ .

Să căutăm să demonstrăm încă o teoremă.

**Teoremă.** Dacă  $\alpha \perp \beta$  și  $AA' \perp \beta$ , atunci  $AA' \subset \alpha$  (unde  $A \in \alpha$  și  $A' \in \beta$ )  
**în primul plan (AA'  $\subset \alpha$ ,  $A' \in \beta$  și  $AA' \perp \beta$ )**

**Demonstrație.** Notăm cu  $m = \alpha \cap \beta$ . Prin reducere la absurd presupunem că  $AA' \perp \beta$  nu este conținută în planul  $\alpha$ . Dar  $\alpha$  este perpendicular pe  $\beta$ , deci există în  $\alpha$  o dreaptă  $g$  perpendiculară pe  $\beta$  (fig. 7.3) - adică pe orice

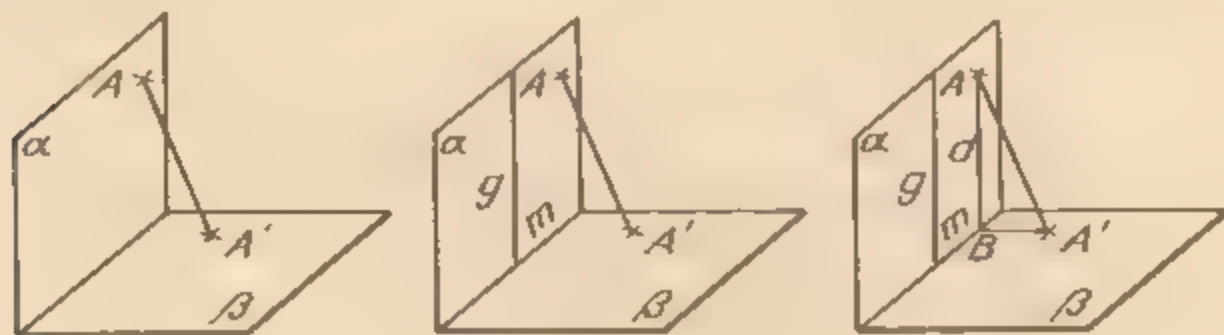


Fig. 7.3

dreaptă a lui  $\beta$ . Ducem prin  $A$  dreapta  $d$  paralelă cu  $g$ . Și ea va face același unghi cu toate dreptele din  $\beta$ . Dreapta  $d$  întâlnește dreapta  $m$  în  $B$ . În planul determinat de  $A, A', B$ , ar exista deci două drepte  $AB$  și  $AA'$  perpendiculare pe  $HA'$ . Dar acest lucru este imposibil, pentru că  $AB$  și  $AA'$  sînt concurente.

Rămîne numai cazul cînd  $g$  ar trece prin  $A$ , dar atunci problema este rezolvată,  $g$  fiind, prin definiție, conținută în  $\alpha$ .

## Perpendiculara comună a două drepte

### Teoremă.

Cu alte cuvinte, există o dreaptă și numai una, perpendiculară pe două drepte necoplanare și care să se sprijine pe ele.

*Existența.* Dintr-un punct  $P$  al lui  $a$ , ducem  $b'$  paralelă cu  $b$  și considerăm planul  $\alpha$  determinat de  $a$  și  $b'$  (fig. 74). Ducem planul  $\beta$  perpendicular pe  $\alpha$  și care conține dreapta  $a$ . Acesta se intersectează cu dreapta  $b$  în  $M$ . Perpendiculara  $MN$  (din  $M$  pe  $a$ ) este dreapta căutată. Într-adevăr, pentru că  $\alpha \perp \beta$ ,  $MN \subset \beta$ ,  $MN \perp a$ , rezultă  $MN \perp \alpha$ , deci  $MN \perp b'$  deci  $MN \perp b$ . Și din construcție,  $MN \perp a$ .

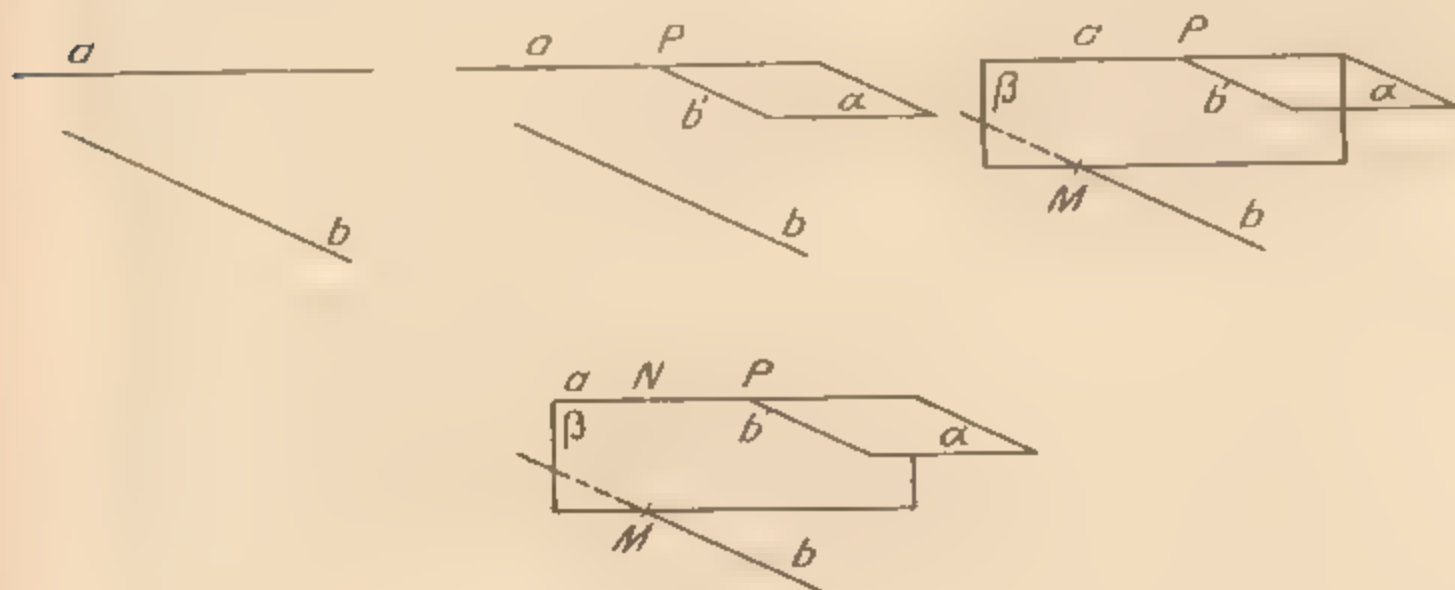
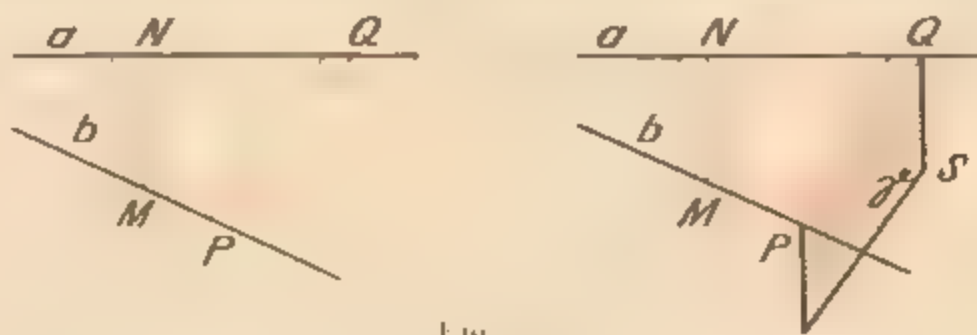


Fig. 74



**Unicitatea.** Presupunem, prin absurd, că ar exista două perpendiculare  $MN$  și  $PQ$  pe  $a$  și  $b$ , cu punctele  $M, P$  situate pe  $b$  și  $N, Q$  pe  $a$ , ( $a$  și  $b$  fiind necoplanare) (fig. 7.5). Din  $Q$  ducem  $QS$  paralelă cu  $MN$  și considerăm



planul  $\gamma$  determinat de  $PQ$  și  $QS$ . Dreptele  $a$  și  $b$  sunt perpendiculare, ambele, pe planul  $\gamma$  fiind perpendiculare pe două din dreptele sale. Ar însemna că  $a$  și  $b$  sunt paralele dar ele sunt necoplanare,ată contradicția. Ar rămînea de studiat cazul cînd cele două perpendiculare ar avea pe una din dreptele  $a$  sau  $b$ , un punct comun. De pildă  $N = Q$ . Lăsăm pe seama cititorului să „elimine” și acest caz.

## Perpendicularitate și paralelism

În plan, această legătură se exprimă prin: *Două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.*

În spațiu apar două asemenea proprietăți:

1)

**Demonstrație.** Dacă ar avea un punct comun atunci, unindu-l cu punctele de intersecție ale celor două plane cu dreapta pe care sînt perpendiculare, am obține două perpendiculare din acel punct pe dreaptă (situate în planul determinat de acel punct și dreaptă), ceea ce este imposibil.

2)

**Demonstrație:** Fie  $d \perp \alpha$ . Orice paralelă la  $d$  este perpendiculară pe toate dreptele din  $\alpha$ , deci este perpendiculară pe  $\alpha$ . Fie  $d'$  perpendiculară pe  $\alpha$  în punctul  $M$ . Ducem prin  $M$  paralela  $d''$  la  $d$ . Conform faptului că dintr-un punct se poate duce o singură perpendiculară pe un plan, că  $d' = d''$ .

**Observație** În spațiu, nu este adevărat că două drepte perpendiculare pe o a treia sînt paralele.

## PERPENDICULARE ȘI OBLICE DISTANȚA DE LA UN PUNCT LA UN PLAN

**Teoremă.** Fie  $M$  un punct în spațiu,  $\alpha$  un plan și  $N$  piciorul perpendicularei duse din  $M$  pe  $\alpha$ .

a. Dacă  $P \in \alpha$ ,  $P \neq N$ , atunci  $MP > MN$ .

b. Dacă  $P_1, P_2$  sînt puncte din  $\alpha$  atunci  $NP_1 \equiv NP_2$ , dacă și numai dacă,  $MP_1 \equiv MP_2$ .

**Demonstrație.** este imediată, considerînd triunghiul  $MNP$ , respectiv triunghiurile  $MNP_1, MNP_2$  (fig. 7.6)



Fig. 7.6

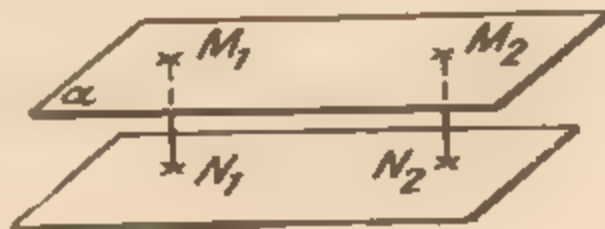
**Observație.** Teorema se poate formula și astfel: perpendiculara dintr-un punct pe un plan este mai scurtă decât orice oblică dusă din același punct pe acel plan, și două oblice duse din același punct la un plan sînt congruente, atunci și numai atunci cînd picioarele lor sînt congruente.

**Definiție.** Distanța de la un punct  $M$  la un plan  $\alpha$  este lungimea segmentului  $MN$ , unde  $N$  este piciorul perpendicularei din  $M$  pe  $\alpha$ .

**Teoremă.** Dacă două plane sînt paralele, atunci distanțele de la un punct la unul din plane sînt egale. Dacă două plane sînt paralele, atunci distanțele de la un punct la cele două plane sînt egale.

**Demonstrație.** Fie  $M_1, M_2 \in \alpha$  și  $N_1, N_2$  picioarele perpendicularelor din  $M_1, M_2$  pe  $\beta$  (fig. 7.7).

Fig. 7.7



Știm că  $M_1N_1 \parallel M_2N_2$  (perpendicularitate și paralelism), deci  $M_1, N_1, N_2, M_2$  sînt în același plan. De la proprietățile planelor paralele știm că  $M_1M_2 \perp N_1N_2$ , deci  $M_1N_1N_2M_2$  este dreptunghi și deci  $M_1N_1 \perp M_2N_2$ , ceea ce trebuia demonstrat.

*Aplicații.* Se pot dovedi ușor, folosind teorema asupra oblicelor congruente, următoarele afirmații:

1

*pe planul acestuia*

*Demonstrație.* Cu notațiile din figura 78,  $A, B, C$  sînt vîrfurile triunghiului  $O$  care are ca înălțime  $d$  perpendiculara în  $O$  pe planul triunghiului și  $M$  un punct oarecare pe  $d$ . Știm că razele  $OA = OB = OC$  și  $MA = MB = MC$  ca oblice din același punct, egal depărtate de planul perpendicularar. Reciproc, dacă  $A$  este un punct în plan astfel încît  $MA = MB = MC$ ,  $M$  este perpendiculara din  $A$  pe planul  $(ABC)$ , atunci  $N'A = N'B = N'C$ , deci  $N'$  coincide cu  $O$ .

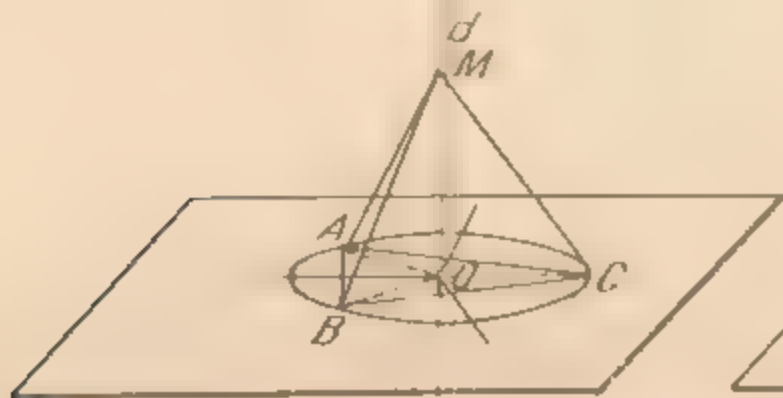


Fig. 78

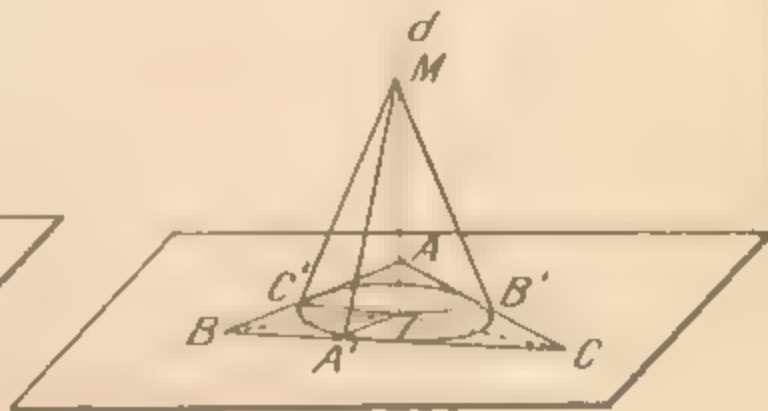


Fig. 79

2

*Demonstrație.* Cu notațiile din figura 79,  $A, B, C$  sînt vîrfurile triunghiului  $I$  centrul cercului înscris,  $d$  perpendiculara în  $I$  pe planul triunghiului și  $M$  un punct oarecare al ei. Avem  $MA' = MB' = MC'$  ca oblice din același punct, egal depărtate de planul perpendicularar. Deci, orice punct  $M \in d$  are proprietatea cerută. Reciproc, considerînd un punct  $M$  exterior planului triunghiului  $(ABC)$  astfel încît distanțele la laturile lui să fie egale ( $MA' = MB' = MC'$ ), ducînd din  $M$  perpendiculara  $MI'$  pe planul triunghiului ( $I'$  în acest plan) și aplicînd o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare avem  $I'A' = I'B' = I'C'$ ; deci  $I$  și  $I'$  coincid.

## PROBLEME 7

1. Dreptunghiul  $ABCD$  cu laturile  $AB = 3$  cm,  $BC = 12$  cm se îndoaie de-a lungul dreptei  $MN$  ( $M$  mijlocul lui  $AD$ ,  $N$  mijlocul lui  $BC$ ), până când planele  $AMB$  și  $BCN$  devin perpendiculare. Să se afle lungimea segmentului  $BD$  după îndoire.

2. Un trapez isoscel  $ABCD$  are baza mare  $AB = 22$  cm, baza mică  $CD = 10$  cm și înălțimea paralelă egală cu 10 cm. Se îndoaie trapezul în lungul liniei mijlocii  $MA$ , până când planele  $(ABM)$  și  $(BCN)$  devin perpendiculare. Să se afle distanța, după îndoire, de la punctul  $D$  la baza  $AB$ .

3. Dreptunghiul  $ABCD$  se îndoaie de-a lungul diagonalei  $AC$ , până când planele  $ACB$  și  $ACD$  devin perpendiculare. Dacă  $AB = 3$  cm și  $BC = 4$  cm, să se afle lungimea segmentului  $BD$ , după îndoire.

4. Un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) se îndoaie în lungul înălțimii  $AD$ , până când planele  $ABD$  și  $ADC$  devin perpendiculare. Știind că  $AB = 2\sqrt{6}$  cm și  $AC = 2\sqrt{10}$  cm, să se calculeze distanța între punctele  $B$  și  $C$ , după îndoire.

5. Două triunghiuri dreptunghice isoscele  $ABC$ , ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) și  $AEC$ , ( $\hat{C} = 90^\circ$ ) au cateta  $AC = a$  comună și planele perpendiculare. Să se calculeze lungimea segmentului  $BD$ .

6. Fie  $\alpha$  și  $\beta$  două plane perpendiculare și  $A$  și  $B$  două puncte ( $A \in \alpha$ ,  $B \in \beta$ ). Știind că punctele  $A$ ,  $B$  sunt situate la o distanță de 3 m față de dreapta de intersecție a celor două plane și că  $AB = \sqrt{34}$  m, să se calculeze distanța între  $M$  și  $N$  (picioarele perpendicularelor duse din  $A$  și  $B$  pe dreapta de intersecție a celor două plane).

7. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte paralele.

8. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte concurente.

9. Să se determine locul geometric al punctelor egal depărtate de două semiplane mărginite de aceeași dreaptă.

10. Dacă numim „plan bisector“ locul geometric găsit la problema precedentă, atunci, să se arate că, fiind date trei plane care au un punct comun și numai unul, planele bisectoare au o dreaptă comună.

11. Fie  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  trei segmente perpendiculare două câte două. Perpendiculara din  $O$  pe planul triunghiului  $ABC$  cade în punctul de întâlnire al înălțimilor triunghiului  $ABC$ .

12. Un triunghi dreptunghic isoscel  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) se îndoaie de-a lungul înălțimii  $AA'$ , până când planele triunghiurilor  $AA'B$ ,  $AA'C$  devin perpendiculare. Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  obținut după îndoire are un unghi de  $60^\circ$ .



13. În triunghiul  $ABC$ , se consideră linia mijlocie  $MN$  ( $M \in AB$  și  $N \in AC$ ) și secanta  $AP$  ( $P \in BC$ ),  $AP \cap MN = P'$ . Se îndoaie triunghiul de-a lungul lui  $MN$ , astfel încât planele  $AMN$  și  $BMN$  să fie perpendiculare. Să se demonstreze că triunghiul nou format,  $PP'A$  este isoscel.

14. Să se arate că prin orice dreaptă, situată într-un plan  $\alpha$ , trece un plan unic perpendicular pe  $\alpha$ .

15. Dacă dreptele  $a$  și  $b$  sînt perpendiculare și dacă  $a \perp \alpha$  și  $b \perp \beta$  ( $\alpha$  și  $\beta$  fiind două plane), atunci  $\alpha \perp \beta$ .

16. Dacă o dreaptă  $d$  este intersecția a două plane  $\alpha, \beta$  perpendiculare pe un plan  $\gamma$ , atunci  $d \perp \gamma$ .

## PROiecții

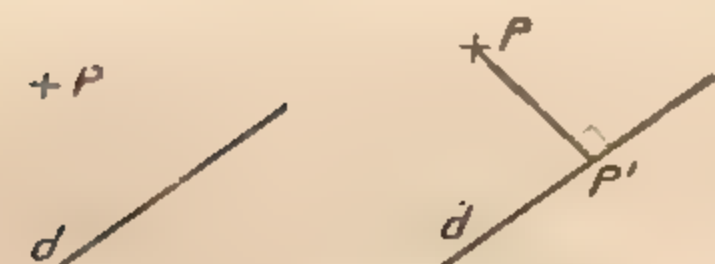


Fig. 8.1.

**Definiție.** Se numește *proiecție* a unui punct  $P$  pe o dreaptă  $d$ , pictorul perpendicularei duse din  $P$  pe dreapta  $d$  (într-un plan care conține punctul  $P$  și dreapta  $d$ ) (fig. 8.1).

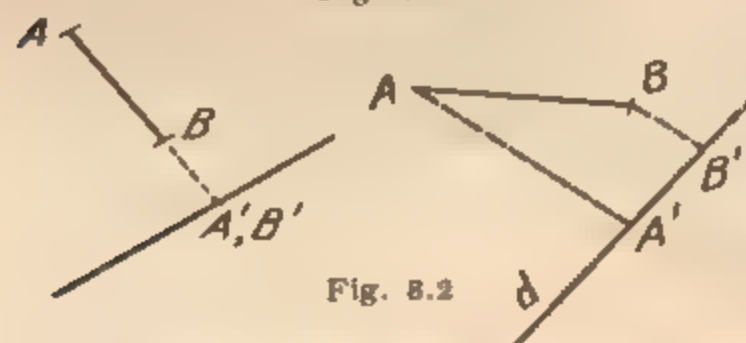


Fig. 8.2

La fel ca în geometria în plan, se constată că proiecția unui segment pe o dreaptă este un punct sau un segment (fig. 8.2).

În teoremele de mai jos vom conveni să considerăm  $\cos 0^\circ = 1$  și  $\cos 90^\circ = 0$ .

### Teoremă.

*1 și dreapta ce conține segmentul*

**Demonstrație.** Teorema este cunoscută în cazul în care  $A, B$  și  $d$  sînt coplanare. În cazul cînd  $A, B$  și  $d$  nu sînt coplanare, avem, desigur,  $B \neq B', A \neq A'$ , iar  $A, A', B$  nu sînt coliniare.

<sup>1</sup> Vă sfătuim să rețineți rezultatele problemelor 14, 15, 16 pentru că ele vă pot fi utile în rezolvarea altora..

Să alegem pe paralela la  $AB$  dusă prin  $A'$ , de aceeași parte a dreptei  $d$  ca și  $B$ , un punct  $B''$  așa încît  $A'B'' = AB$  (fig. 8.3).



Fig. 8.3

Patrulaterul  $AA'B''B$  este un paralelogram, deci  $BB'' \parallel AA'$ ,  $BB'' \perp d$ . Sau  $B''$  este pe dreapta  $BB'$ , sau  $d$  perpendiculară pe planul  $BB'B''$ . În ambele cazuri,  $B''$  este în planul perpendicular pe  $d$  în  $B'$ , deci  $B'$  este proiecția lui  $B''$  pe  $d$ . Cum  $u$  este unghiul dintre  $d$  și  $A'B''$ , iar  $d$  și  $A'B''$  sînt coplanare, avem  $A'B' = A'B'' \cdot \cos u = AB \cdot \cos u$ .

## PROIECȚII PE UN PLAN

### Definiție.

*Perpendiculara dusă din acel punct pe plan*

Perpendiculara din punctul  $A$  pe plan se numește *proiectanta* lui  $A$ . Proiectanta lui  $A$  pe un plan este unică. Într-adevăr, să presupunem că ar fi două, unind picioarele perpendiculararelor pe plan am obține, împreună cu punctul  $A$ , un triunghi cu două unghiuri drepte, ceea ce este imposibil.

Evident, cînd punctul se găsește pe plan, atunci el coincide cu proiecția sa (fig. 8.4).

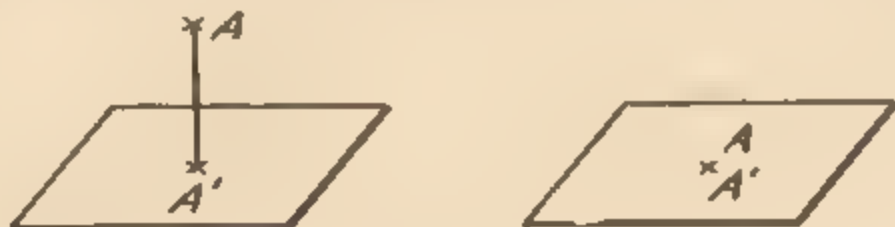


Fig. 8.4

Pentru că deocamdata nu cunoaștem altă proiecție decît cea ortogonală în vom spune aceasta, pe scurt, proiecție.

Prin proiecția unei figuri oarecare pe un plan, înțelegem locul geometric al proiecțiilor punctelor sale pe acel plan.

### Teoremă.

**Demonstrație Cazul 1.** Când dreapta  $d$  nu este perpendiculară pe plan, atunci proiecția ei pe acest plan este o dreaptă (fig. 8.5)

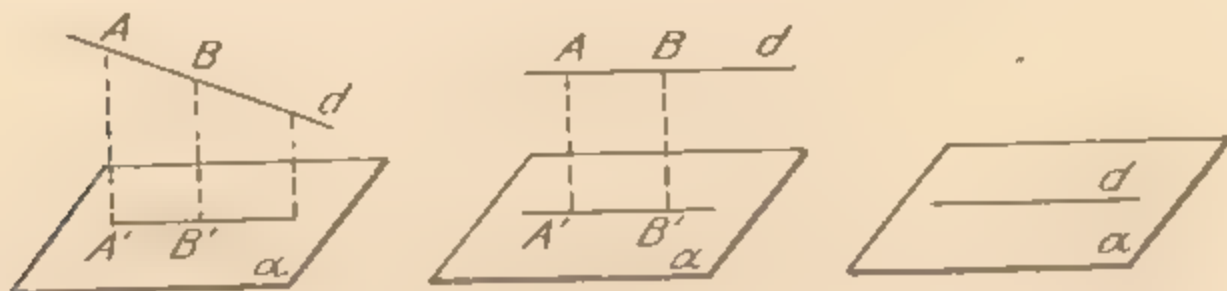


Fig. 8.5

Considerăm punctul  $A$  fix pe dreaptă și punctul  $B$  mobil pe aceeași dreaptă.  $A'$  și  $B'$  proiecțiile acestor puncte pe planul dat.  $BB'$ , „sprijinindu-se” pe dreapta  $d$  și avînd o direcție dată (aceeași cu a lui  $AA'$  pentru că două drepte perpendiculare pe un plan sînt paralele), generează un plan. Intersecția acestuia cu planul inițial  $\alpha$  este evident o dreaptă. Cea căutată. Evident, orice punct  $M' \in A'B'$  este proiecția unui punct  $M \in AB$ , pentru că dacă o secantă taie o dreaptă, taie orice paralelă a ei.

**Observație.** Dacă dreapta este paralelă cu planul, proiecția ei va fi paralelă cu el. Dacă dreapta este conținută în plan, ea coincide cu proiecția ei.

**Cazul 2. Dreapta este perpendiculară pe plan.**

În acest caz proiecția ei este un punct, deoarece proiectanta, oricărui punct  $A$  de pe  $d$  pe  $\alpha$  este  $d$  însăși. Deci proiecția lui  $d$  pe planul  $\alpha$  se reduce la punctul de intersecție a lui  $d$  cu  $\alpha$  (fig. 8.6).

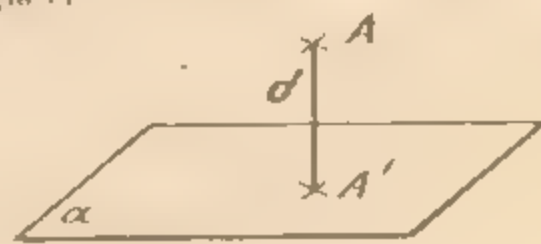


Fig. 8.6

**Observație.** Nu trebuie înțeles însă că dacă proiecția unei curbe pe un plan este o dreaptă, curba aceasta este o dreaptă. Astfel, proiecția oricărei curbe plane pe un plan perpendicular pe planul ei este o porțiune din dreapta de intersecție a celor două plane (fig. 8.7)



Fig. 8.7

### Teoremă.

*Demonstrație. Cazul 1.* Segmentul de proiectat nu este perpendicular pe plan.

Problema se reduce la o problemă de geometrie în plan, în planul determinat de proiectante (fig. 8.8).

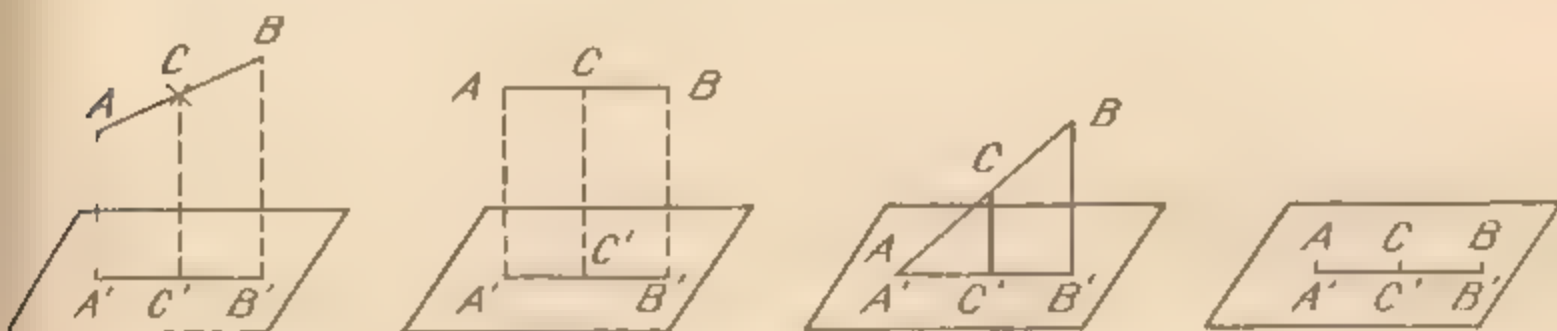


Fig. 8.8

*Cazul 2.* Segmentul, care se proiectează, este perpendicular pe plan, atunci proiecția sa este un punct.

Într-adevăr, întreaga dreaptă-suport a segmentului se proiectează într-un punct. Deci și segmentul conținut în ea.

### PROBLEME 8

1. Trei puncte coliniare  $A, B, C$  se proiectează pe un plan în  $A', B', C'$ . Să se demonstreze că  $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ .

2. Fie  $ABC$  un triunghi și  $A'B'C'$  proiecția lui pe un plan  $\alpha$ . Dacă  $A, B, C$  sînt mijloacele segmentelor  $BC, CA, AB$ , atunci aceste trei puncte se proiectează, pe  $\alpha$ , în mijloacele segmentelor  $B'C', C'A', A'B'$ .

3. Fie  $a, b$  două drepte paralele. Ce puteți spune despre proiecțiile lor,  $a'$  și  $b'$ , pe un același plan?

4. Se proiectează un triunghi oarecare  $ABC$  pe un plan  $\alpha$  în  $A'B'C'$ . Să se demonstreze că proiecția centrului de greutate  $G$  al triunghiului  $ABC$  este centrul de greutate  $G$  al triunghiului  $A'B'C'$ .

5. Triunghiul echilateral  $ABC$  ( $AB = a$ ) are latura  $BC$  conținută în planul  $\alpha$ , iar  $A'$  este proiecția lui  $A$  pe  $\alpha$ . Știind că  $\angle BA'C = 90^\circ$ , să se calculeze  $\widehat{A'BA}$ .

6. Unghiul  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  are latura  $OA$  paralelă cu planul  $\alpha$ . Dacă  $A', O', B'$  sînt proiecțiile punctelor  $A, O, B$  pe  $\alpha$ , arătați că  $\widehat{A'O'B'} = 90^\circ$ .

7. Triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = AC$ ) are punctul  $B$  în planul  $\alpha$ , iar  $C$  și  $A$  de aceeași parte a planului  $\alpha$ . Fie  $A'$  și  $C'$  proiecțiile punctelor  $A$  și  $C$  pe  $\alpha$ . Știind că triunghiurile  $AA'B$  și  $A'BC'$  sînt dreptunghice și isoscele ( $A'B = BC'$  și  $A'B = a$ ), să se calculeze lungimea segmentului  $CC'$ .



8. Triunghiul isoscel  $ABC$  se proiectează pe planul  $\alpha$ , ce conține pe  $BC$ , după triunghiul dreptunghic  $A'BC$ . Știind că  $A'B = 4$  cm,  $A'C = 3$  cm, să se calculeze

- cosinusul unghiului  $ABC$ ;
- lungimea laturii necongruente cu celelalte ale triunghiului  $ABC$

## UNGHIIUL A DOUĂ DREPTE

Teorema asupra congruenței unghiurilor cu laturile paralele ne permite să dăm o definiție unghiului a două drepte, în general necoplanare. Să observăm că, având două perechi de drepte paralele ce trec prin punctele  $P$  și  $P'$ , putem alege totdeauna semidrepte pe ele, cu originile în  $P$ , respectiv  $P'$ , astfel încât ipotezele din teorema citată să fie satisfăcute.

**Definiție.**

*Unghiul a două drepte este măsura unghiurilor* **paralele la dreptele date** (fig. 9.1).

De multe ori vom folosi drept „unghi a două drepte”, măsura lui

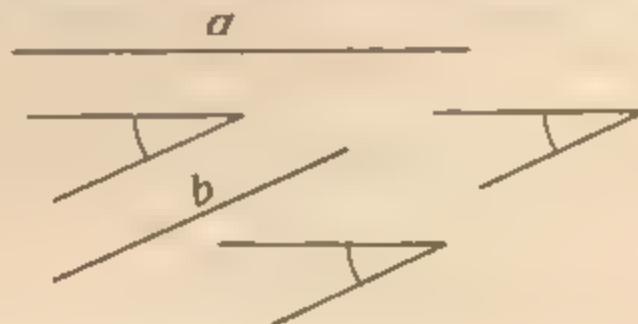


Fig. 9.1

**Observație.** Unghiul a două drepte este  $0^\circ$  dacă și numai dacă dreptele sînt paralele

## UNGHIIUL UNEI DREPTE CU UN PLAN

**Definiție.** *Unghiul a unei drepte cu un plan, în orice punct de pe dreapta ce proiectăm pe plan (în cazul cînd dreapta nu este perpendiculară pe plan și nici paralelă cu el)* (fig. 9.2).

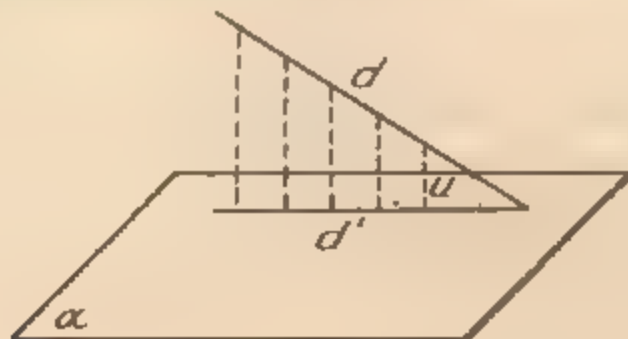


Fig. 9.2

Dacă dreapta este perpendiculară pe plan, vom considera unghiul dreptei cu planul respectiv de  $90^\circ$  (fig. 9.3, a).



Fig. 9.3

Dacă dreapta este paralelă cu planul, vom conveni să spunem că dreapta face cu planul un unghi de  $0^\circ$  (fig. 9.3, b).

Unghiul  $u$  al unei drepte cu un plan este deci cuprins între  $0^\circ$  și  $90^\circ$  ( $u \in [0^\circ, 90^\circ]$ ).

**Teoremă.** Unghiul unei drepte  $d$  cu un plan  $\alpha$  este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu o dreaptă oarecare a planului.

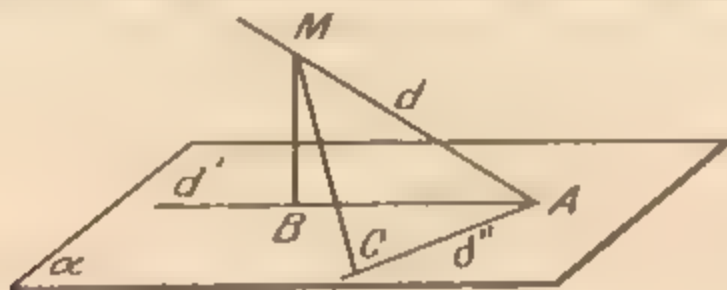


Fig. 9.4

**Demonstrație.** Dreapta  $d$  se proiectează pe planul  $\alpha$  după dreapta  $d'$  ( $A = d \cap \alpha$ ). Considerăm o altă dreaptă  $d'' \subset \alpha$ , pe care o putem presupune că trece prin  $A$ . Din  $M \in d$ , ducem  $MB \perp d'$ . Luăm pe  $d''$ , în direcția în care formează un unghi ascuțit cu  $d$ , segmentul  $AC \equiv AB$ . Triunghiurile  $MAB$  și  $MAC$  au câte două laturi respectiv congruente ( $MA$  comună și  $AB \equiv AC$ ) și  $MC > MB$  (segmentul oblic este mai mare decât segmentul perpendicular). Se știe că în două triunghiuri care au câte două laturi respectiv congruente, laturii a treia mai mari se opune un unghi mai mare și reciproc, deci  $\angle MAC > \angle MAB$ , și teorema este demonstrată.

**Observație.** În particular, dacă unghiul unei drepte  $a$  (din planul  $\alpha$ ) cu  $d$ , este congruent cu unghiul dreptei  $d$  cu proiecția sa pe  $\alpha$ , putem trage concluzia că acea dreaptă  $a$  este paralelă cu proiecția dreptei  $d$  pe  $\alpha$ .

**Comentariu.** Definiția distanței de la un punct la un plan și definiția unghiului dintre o dreaptă și un plan apar analoage: anume ambele elemente sînt cele mai mici posibile, dintre toate cele care pot fi propuse.

**Observație.** Unghiul dintre o dreaptă și un plan este complementar unghiului dintre acea dreaptă și o perpendiculară pe acel plan. Aceasta ar fi putut fi luată și ca definiție.

Reamintindu-ne o observație relativă la unghiul unei drepte cu un plan, precum și faptul că două perpendiculare pe același plan sînt paralele, dăm următoarea:

### Definiție.

**Teoremă.** Fie  $\alpha$  și  $\beta$  două plane care se intersectează după dreapta  $d$ . Să alegem un punct  $P \in d$  și să ducem dreptele  $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ , perpendiculare în  $P$  pe  $d$ .

Atunci unghiul dintre planele  $\alpha$ ,  $\beta$  este congruent cu unghiul dintre dreptele  $a$  și  $b$ .

**Demonstrație.** Să considerăm planul  $\pi$ , perpendicular în  $P$  pe  $d$ . El va conține dreptele  $a$  și  $b$  (fig. 9.5). Planul  $\pi$  va fi perpendicular pe planele  $\alpha$  și  $\beta$ , deci el va conține două drepte  $a'$ ,  $b'$  ce trec prin  $P$ , perpendiculare pe  $\alpha$ , respectiv  $\beta$  (fig. 9.6). Rezultă  $a' \perp a$ ,  $b' \perp b$ . Unghiul dintre planele  $\alpha$ ,  $\beta$  este congruent cu unghiul ascuțit format de  $a'$  și  $b'$ , care, avînd laturile perpendiculare pe cele ale unghiului ascuțit format de  $a$  și  $b$ , este congruent cu acesta.

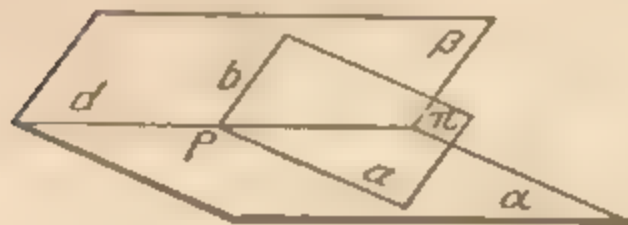


Fig. 9.5

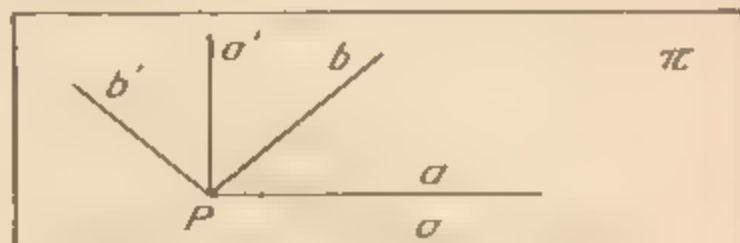


Fig. 9.6

**Observație.** Două plane sînt perpendiculare dacă și numai dacă unghiul lor este de  $90^\circ$ . Două plane sînt paralele dacă și numai dacă unghiul lor este de  $0^\circ$ .

## UNGHIIURI DIEDRE

**Definiție.** Vom numi unghi diedru, figura formată de două semiplane delimitate de aceeași dreaptă  $d$  în două plane diferite  $\alpha$ ,  $\beta$  ce conțin  $a$  (fig. 9.7).

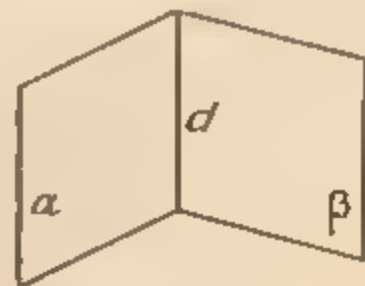


Fig. 9.7

com  $n = a + b$ , plan al unghiului  $\theta$  este perpendicular pe  $AB$ , unde  $a = AD$ ,  $b = DB$ . Dacă  $\theta$  este unghiul diedru inițial, atunci  $\theta$  este unghiul plan al unghiului diedru inițial.

**Observație.** Unghiul planelor  $\alpha$  și  $\beta$  este congruent cu unghiul plan al diedrului, dacă acesta nu este obtuz, și cu suplementul acestuia, în caz contrar.

**Problemă rezolvată.** Se dau în spațiu două semiplane  $\alpha$  și  $\beta$ , care au muchia comună  $m$ . Se cunoaște că perpendicularele din același punct  $M \in m$ ,  $u \subset \alpha$  și  $v \subset \beta$  pe muchia  $m$ , fac între ele unghiul  $\theta$  (fig. 9.8).

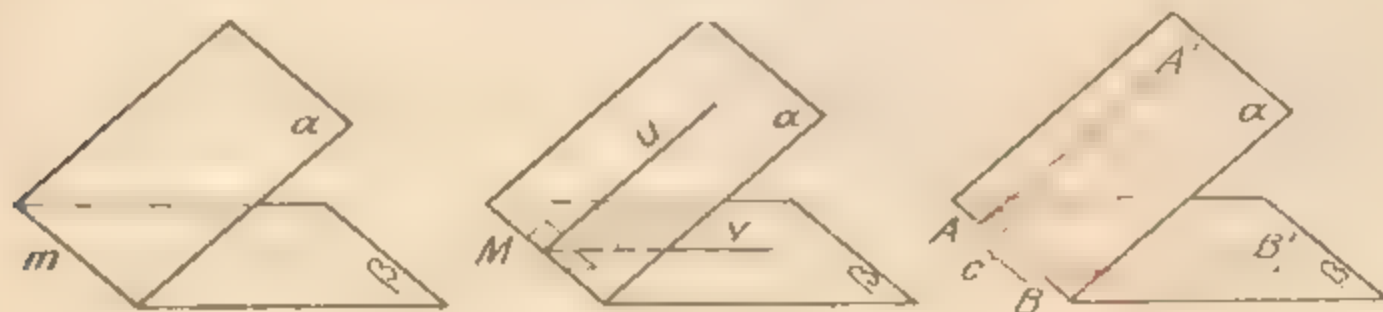
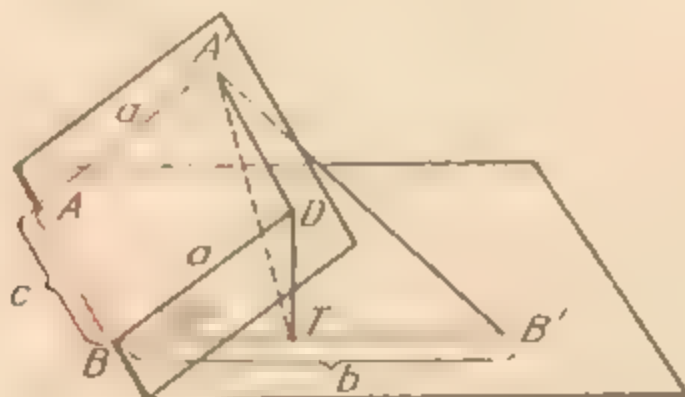


Fig. 9.8

Fie pe muchia  $m$ , segmentul  $AB = c$ , și în planele  $\alpha$  și  $\beta$  segmentele  $A'B' = a$ ,  $B'B = b$  ambele perpendiculare pe  $c$ .

Fig. 9.9



Să se calculeze în funcție de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  și  $\theta$  segmentul  $A'B'$ .

Ducem segmentul  $BD$  paralel și congruent cu  $A'D'$ , deci  $BD = a$ . Dăruim  $DT$  perpendicular pe  $BB'$ , deci triunghiurile  $BDT$ ,  $A'TB'$  și  $A'DT$  sînt dreptunghice. Rezultă  $DT = a \cdot \sin \theta$  și de aici  $A'T^2 = DT^2 + A'D^2 = c^2 + a^2 \cdot \sin^2 \theta$ . În triunghiul  $A'TB'$  se poate aplica teorema lui Pitagora:  $A'B'^2 = (b - a \cdot \cos \theta)^2 + c^2 + a^2 \cdot \sin^2 \theta = b^2 - 2ab \cdot \cos \theta + a^2 \cdot \cos^2 \theta + c^2 + a^2 \cdot \sin^2 \theta$  și, știind că  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , rezultă:  $A'B'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cdot \cos \theta$ .

Această formulă, „seamănă” cu teorema cosinusilor, dar unghiul  $\theta$  joacă un rol deosebit în calculul unui segment așezat în două plane care au o dreaptă comună. În fond  $\theta$  nu este decât unghiul plan al unghiului diedru inițial.



## Teoremă.

*ce conține segmentul și planul  $\alpha$*

**Demonstrație.** Dacă  $d \perp \alpha$ , atunci  $u = 90^\circ$  și  $\cos u = 0$ , proiecția este un punct etc. Dacă  $u \neq 90^\circ$ , fie  $d'$  proiecția lui  $d$  pe  $\alpha$ . Proiecția segmentului pe planul  $\alpha$  coincide cu proiecția sa pe dreapta  $d'$ ,  $u$  este, prin definiție, unghiul dintre dreptele  $d$  și  $d'$  și teorema rezultă adevărată pe baza celei precedente.

Înainte de a stabili un rezultat asupra ariei unei proiecții, vom demonstra:

**Teoremă ajutătoare.** Fie  $\alpha$  și  $\beta$  două plane neperpendiculare, ce se intersectează după o dreaptă  $d$ . Dacă  $b$  este o dreaptă din  $\beta$ , perpendiculară pe  $d$ , atunci proiecția lui  $b$  pe  $\alpha$  este perpendiculară pe  $d$ , iar unghiul dintre  $b$  și  $\alpha$  este egal cu unghiul dintre planele  $\alpha$  și  $\beta$ .

**Demonstrație.** Fie  $P$  punctul de intersecție al lui  $b$  cu  $d$  (fig. 9.10). Să ducem un plan  $\pi \perp d$ , prin  $P$ . El va conține pe  $b$  și va fi perpendicular

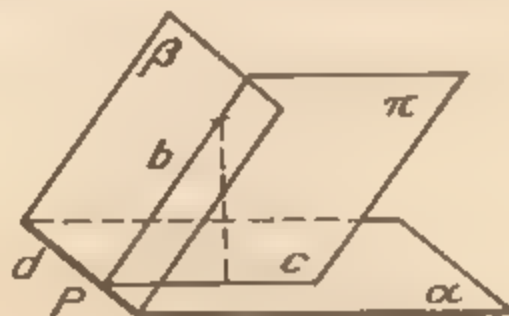


Fig. 9.10

pe  $\alpha$ , deci proiecția lui  $b$  pe planul  $\alpha$  va fi dreapta  $c = \pi \cap \alpha$ , care va fi perpendiculară pe  $d$  ( $b$  nu este perpendiculară pe  $\alpha$ , deoarece  $\beta$  nu este perpendicular pe  $\alpha$ ).

S-a văzut în teorema ajutătoare că unghiul dintre  $\alpha$  și  $\beta$  este egal cu unghiul dintre  $b$  și  $d$ , care, prin definiție, este egal cu unghiul dintre  $b$  și  $\alpha$ . Acum putem dovedi:

## Teoremă.

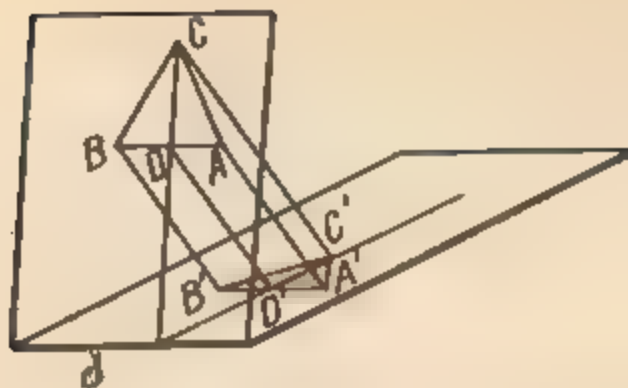
*planul triunghiului și planul  $\alpha$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $u = 90^\circ$ , triunghiul se proiectează după un segment ( $\cos u = 0$ ) etc. Dacă  $u = 0^\circ$ , triunghiul se proiectează după unul egal cu el, conform teoremei precedente ( $\cos u = 1$ ) etc.

Fie deci,  $0^\circ < u < 90^\circ$ . Planul  $\alpha$  va avea cu planul triunghiului o dreaptă comună  $d$ .

Să considerăm întâi cazul în care triunghiul  $ABC$  are o latură, (fie ea  $AB$ ), paralelă cu  $d$  (fig. 9.11). Să ducem înălțimea  $CD$  a triunghiului. Conform teoremei ajutătoare, proiecția lui  $CD$  este înălțimea  $C'D'$  a triunghiului  $A'B'C'$ .

Fig. 9.11



iar unghiul dintre  $CD$  și  $\alpha$  este egal cu  $u$ . Conform teoremei relative la proiecția unui segment pe un plan vom avea:  $C'D' = CD \cdot \cos u$  și  $A'B' = AB$ , deci aria  $A'B'C' = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot \cos u = (\text{aria } ABC) \cdot \cos u$ .

În cazul general, observăm că orice triunghi se descompune în triunghiuri, avînd fiecare cîte o latură paralelă cu o dreaptă dată  $d$  din planul său (fig. 9.12).

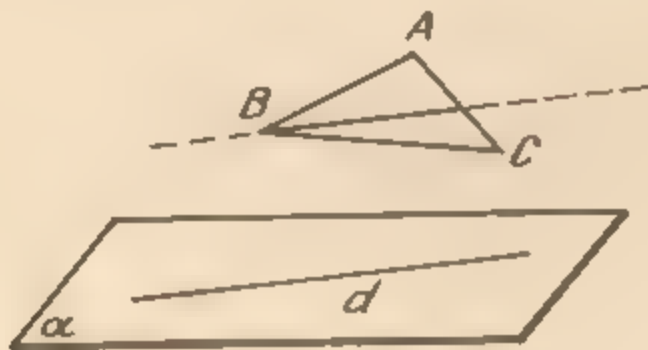


Fig. 9.12

Scriem relația de demonstrat pentru fiecare din aceste triunghiuri, le adunăm și obținem relația dorită.

*Observație.* Teorema se generalizează la orice poligon plan

**Teorema lui Desargues\*.** Din punctul  $V$  pornesc trei semidrepte  $a, b, c$ , necoplanare toate trei. Pe semidreapta  $a$  luăm punctele  $A, A'$ , pe semidreapta  $b$  luăm  $B, B'$  și pe semidreapta  $c$  luăm  $C, C'$ , astfel încît laturile triunghiurilor  $ABC$  și  $A'B'C'$  să nu fie, respectiv, paralele. Atunci dreptele  $AB$  și  $A'B'$ ,  $BC$  și  $B'C'$ ,  $CA$  și  $C'A'$  se întîlnesc în trei puncte coliniare (fig. 9.13).

*Demonstrație.* Vom arăta, mai întîi, că dreptele  $AC$  cu  $A'C'$ ,  $AB$  cu  $A'B'$  și  $BC$  cu  $B'C'$  se întîlnesc și apoi că punctele lor de intersecție sînt coliniare.

Într-adevăr, punctele  $A, A', C, C'$  sînt coplanare ( $A$  și  $A'$  sînt situate pe dreapta  $a$ , iar  $C$  și  $C'$  pe dreapta  $c$ ; dreptele  $a$  și  $c$  sînt concurente, deci coplanare).

\* Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative.

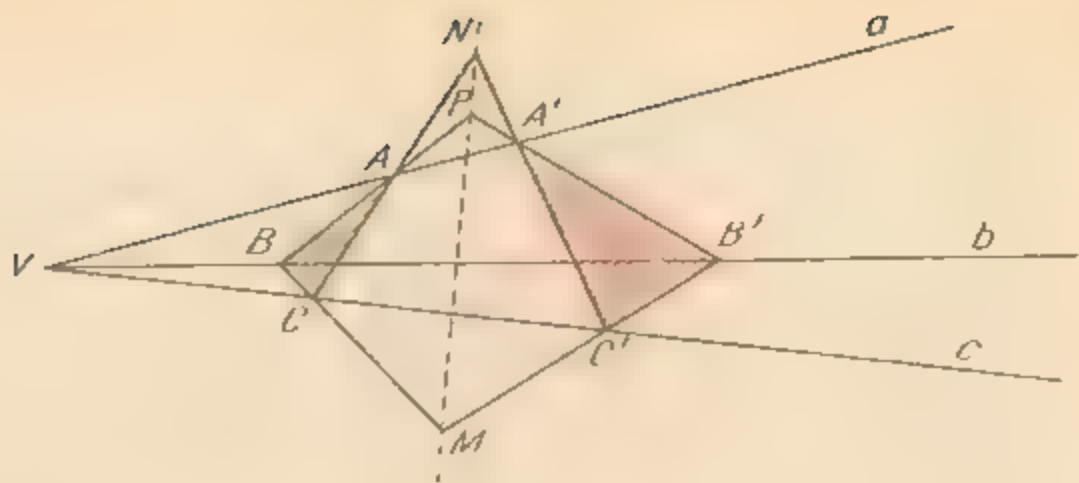


Fig. 9.13

Din ipoteză, dreptele  $AC$  și  $A'C'$  nu sînt paralele, deci, fiind coplanare, se întîlnesc. Fie  $N$  punctul lor de intersecție.

La fel,  $AB$  și  $A'B'$  se întîlnesc în  $P$ ,  $BC$  și  $B'C'$  în  $M$ . Dar punctele  $M, N, P$ , sînt ale dreptelor  $BC, CA, AB$ , aparțin planului triunghiului  $ABC$ , aceleași puncte  $M, N, P$ , fiind situate și pe dreptele  $B'C', C'A', A'B'$ , aparțin și planului triunghiului  $A'B'C'$ , deci sînt situate pe dreapta de intersecție a planelor. Rezultă că  $M, N, P$  sînt coliniare.

*Observați* 1. Dacă două din laturile triunghiurilor, de exemplu  $AC$  și  $A'C'$ , sînt paralele și restul enunțului, rămîne același, se dovedește ușor că dreptele  $MP, A'C'$  și  $AC$  sînt paralele.

2. Dacă  $AC \parallel A'C', BC \parallel B'C'$  atunci și  $AB \parallel A'B'$  și planul triunghiului  $ABC$  este paralel cu cel al triunghiului  $A'B'C'$  (fig. 9.14)

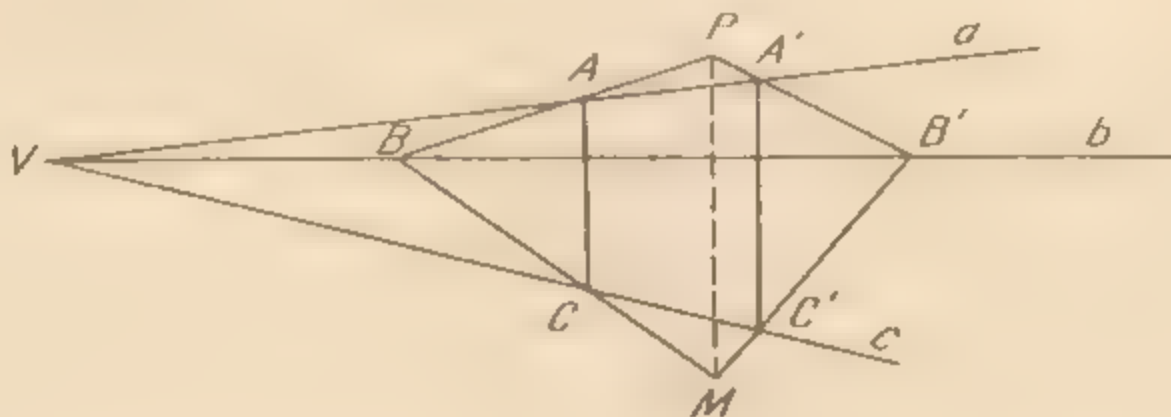


Fig. 9.14

Dacă vom conveni să spunem că două drepte paralele au un punct comun la infinit și că două plane paralele au o dreaptă comună la infinit în enunțul teoremei lui Desargues nu mai este nevoie de specificat că laturile triunghiurilor  $ABC$  și  $A'B'C'$  nu sînt respectiv paralele. Enunțul se simplifică, în schimb sensul său capătă un plus de încărcătură, prin generalizare.

*Problema rezolvată.* Ne-am deprins, pînă acum, să folosim uneori geometria în plan pentru a rezolva probleme sau părți din probleme de geometrie în spațiu. „Metoda proiecției” ne dă posibilitatea să facem și drumul invers: să rezolvăm probleme de geometrie plană cu ajutorul geometriei în spațiu. Teorema lui Desargues este un exemplu clasic în această privință.

Se dau trei drepte în plan (de data aceasta)  $a, b, c$  concurente în  $V$  (fig. 9.15). Două triunghiuri  $ABC$  și  $A'B'C'$  au vîrfurile respectiv pe aceste drepte și nu au laturile corespunzătoare paralele. Să dovedim atunci că acestea se întîlnesc în trei puncte coliniare  $M, N, P$ .

Fie  $\alpha$  planul dreptelor  $a, b, c$  și  $\beta$  un alt plan ( $\beta \perp \alpha$ ), care trece prin  $V$  și printr-o dreaptă  $a'$  ( $V \in a'$ ) ce se proiectează în  $\alpha$  după dreapta  $a$  (fig. 9.16). Fie  $A_1 \in a'$ , punctul care se proiectează în  $A$  pe  $\alpha$  și  $A'_1 \in \alpha$ , punctul care se proiectează în  $A'$  pe  $\alpha$ .

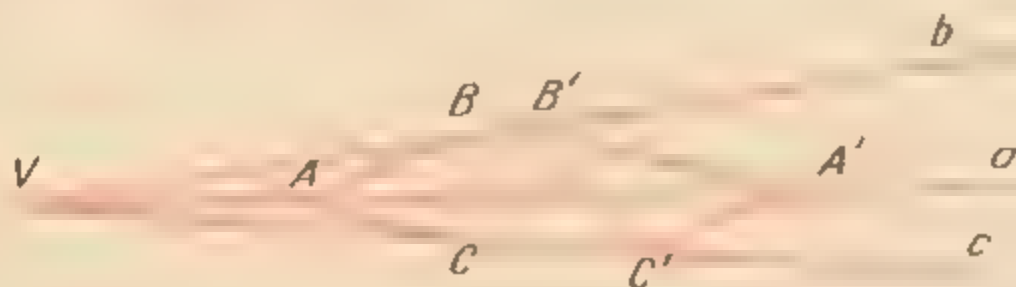


Fig. 9.15

Laturile triunghiurilor  $A_1BC$  și  $A'_1B'C'$ , care îndeplinesc condițiile teoremei lui Desargues în spațiu, se intersectează în trei puncte coliniare  $M_1, N_1, P_1$ , care se vor proiecta în  $M, N, P$  pe planul  $\alpha$ . Dar, proiecția unei drepte fiind tot o dreaptă, rezultă că și

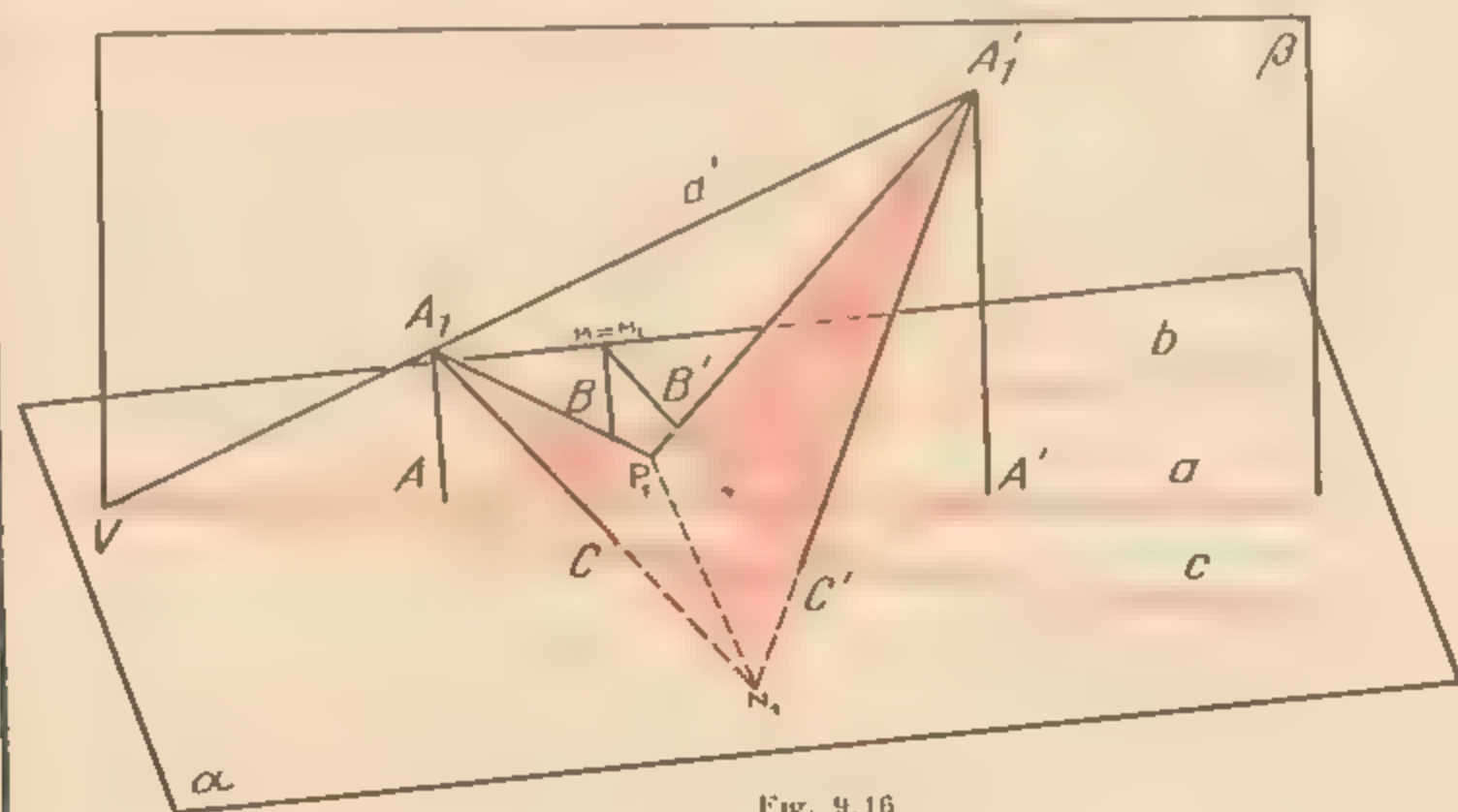


Fig. 9.16



$M, N, P$  sînt coliniare. Veți obiecta că proiecția unei drepte poate fi și un punct, dar acesta se întîmplă cînd dreapta este perpendiculară pe plan. În cazul nostru  $M_1N_1$  este intersecția planelor  $A_1BC$  și  $A'_1BC$ , care ar trebui atunci să fie perpendiculare și ele pe  $\alpha$  (deoarece conțin o dreaptă perpendiculară pe  $\alpha$ ). Dar atunci n-am mai avea în  $\alpha$  un „triunghi”  $ABC$  ci trei puncte pe un segment  $A, B, C$ .

## PROBLEME 9

1. Un segment  $AB = 10$  cm face cu planul  $\alpha$  un unghi de: a)  $45^\circ$ ; b)  $30^\circ$ ; c)  $60^\circ$ . Aflați măsura proiecției segmentului  $AB$  pe planul  $\alpha$ , în cele trei cazuri.

2. Triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) are cateta  $AB$  conținută în planul  $\alpha$ . Proiecția punctului  $C$  pe  $\alpha$  este  $C'$ . Să se demonstreze că triunghiul  $ABC'$  este dreptunghic.

3. Triunghiul dreptunghic isoscel  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) are latura  $BC$  conținută în planul  $\alpha$ , și se proiectează pe acest plan după  $A'BC$ . Știind că  $\angle BA'C = 120^\circ$  și că  $BC = a$ , să se afle:

- înălțimea  $A'D$  ( $D \in BC$ ) a triunghiului  $BA'C$  în funcție de  $a$ ;
- una din funcțiile trigonometrice ale unghiurilor formate de  $AB$  și  $AC$  cu planul  $\alpha$

4. Se dă unghiul  $xOy$  și un punct  $M$  ce nu aparține planului unghiului. Să se arate că, dacă proiecția lui  $M$  pe planul unghiului aparține bisectoarei acestuia, atunci punctul  $M$  este egal depărtat de laturile unghiului  $xOy$ .

5. Un trapez dreptunghic  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ) are baza mare  $AB$  conținută în planul  $\alpha$ . Știind că  $AB = 5$  cm,  $CD = 2$  cm,  $BC = 6$  cm, și că planul trapezului formează cu  $\alpha$  un unghi egal cu unghiul său ascuțit, se cere:

- să se arate că patrulaterul  $ABC'D'$ , ( $C'D'$  — proiecțiile lui  $C$  și  $D$  pe  $\alpha$ ) este trapez dreptunghic;
- să se calculeze dimensiunile trapezului  $ABC'D'$ .

6. Un segment  $AB$  se proiectează pe un plan  $\alpha$  după  $A'B'$ . Știind că  $A'B' = \frac{3}{5} AB$ , să se calculeze tangenta unghiului format de segmentul  $AB$  cu  $\alpha$ .

7. Un triunghi echilateral  $ABC$  cu latura de 6 cm se proiectează pe un plan  $\alpha$ , co conține punctul  $A$ , după  $AB'C'$ . Se știe că  $\angle B'AC' = 90^\circ$ ,  $AB$  și  $AC$  fac cu  $\alpha$  unghiuri congruente, și că sînt de aceeași parte a lui  $\alpha$ . Să se calculeze unghiul format de  $AB$  și  $AC$  cu  $\alpha$ .

8. Două oblice, care pleacă din același punct exterior unui plan, au lungimile de 20 cm și 16 cm. Proiecția pe plan a primei oblice este de 15 cm. Să se afle lungimea proiecției celei de a doua oblice.

9. Triunghiul  $ABC$  se proiectează pe planul  $\alpha$ , care conține pe  $BC$ , după triunghiul  $A'BC$ . Știind că:  $\angle BA'C = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$ ,  $\angle BAC = 75^\circ$  și că înălțimea  $AD$  a triunghiului  $ABC$ , ( $D \in BC$ ) are lungimea  $a$ , să se calculeze:

- segmentele  $BD$  și  $DC$  în funcție de  $a$ ;
- înălțimea corespunzătoare laturii  $BC$  a triunghiului  $BA'C$ ,
- cosinusurile unghiurilor formate de  $AB$  și  $AC$  cu planul  $\alpha$ .

10. Un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ), cu  $AB = 6$  cm,  $AC = 8$  cm se proiectează pe un plan  $\alpha$  după  $A'B'C'$ . Știind că aria triunghiului  $A'B'C'$  este de  $12$  cm<sup>2</sup>, să se afle unghiul plan al diedrului format de  $\alpha$  cu planul triunghiului.

11. Un trapez dreptunghic, cu bazele de 2 cm și  $(2 + 3\sqrt{3})$  cm, are latura oblică de 6 cm. Se proiectează acest trapez pe un plan. Acest plan face cu planul trapezului un unghi cît unghiul ascuțit al trapezului. Să se afle aria proiecției trapezului.

12. Triunghiul  $ABC$  se îndoaie de-a lungul liniei mijlocii  $MN$  ( $M \in AB$ ,  $N \in AC$ ), astfel încît planul triunghiului  $AMN$  și cel al trapezului  $MNCB$  să formeze un diedru drept

a) Să se determine unghiul plan al diedrului format de planul trapezului  $MNCB$  și cel determinat de punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

b) Notînd cu  $S$  aria triunghiului inițial  $ABC$ , să se determine, în funcție de  $S$ , aria noului triunghi obținut după îndoire.

13. Un trapez isoscel are baza mică și laturile oblice egale fiecare cu  $2\alpha$ , iar unghiurile ascuțite egale cu  $60^\circ$ . Să se calculeze aria proiecției acestui trapez pe un plan care face cu planul trapezului un unghi congruent cu unghiul ascuțit al diagonalelor.

14. Un trapez  $ABCD$ , cu baza mare  $AB$ , conținută în planul  $\alpha$ , are raportul bazelor  $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{7}$ . Știind că distanța de la punctul  $C$  la planul  $\alpha$  este de 24 cm, să se afle distanța de la punctul  $O$ , de intersecție a diagonalelor trapezului, la planul  $\alpha$ .

---

# POLIEDRE PARTICULARE

## TETRAEDRUL

Înțelegem prin poliedru o figură care, prin proprietățile ei spațiale, ne amintește proprietățile poligonului, ca figură plană.

Vom începe prin a studia diferite poliedre particulare. Să menționăm că paralelipipedul, de pildă (întâlnit în clasa a cincea), este un poliedru.

Poliedrul, analog triunghiului din plan, este tetraedrul.

Un tetraedru este definit prin patru puncte, numite vîrfuri, care trebuie să fie patru puncte necoplanare (la fel, în plan, triunghiul este definit prin cele trei vîrfuri ale sale, care trebuie să fie necoliniare)

Să unim cele patru puncte în toate modurile posibile (fig. 10.1) Segmentele de dreaptă obținute le numim muchiile tetraedrului. Triunghiurile care se formează și interioarele lor alcătuiesc fețele tetraedrului. Reuniunea acestor fețe este suprafața tetraedrului.

Unind cu un segment de dreaptă puncte de pe suprafața unui tetraedru, neașezate pe aceeași față, orice punct din interiorul acestui segment se numește punct interior tetraedrului.

Reuniunea dintre suprafața tetraedrului și interiorul său formează un corp numit tetraedru. Uneori, vom considera în probleme drept tetraedru numai suprafața sa.

Dacă considerăm tetraedrul „așezat” pe una din fețe, o vom numi pe aceasta bază, iar pe celelalte, fețe laterale.

Distanța de la un vîrf (de pildă  $A$ ) la fața opusă lui ( $\triangle DBC$ ), (fig. 10.1), se numește înălțimea tetraedrului ( $h_a$  din fig. 10.1). Luate astfel, înălțimea este un număr. În unele probleme o vom considera și ca segment cu un capăt în vîrf și cu celălalt capăt în planul feței ce nu trece prin vîrfurile respectiv. Un tetraedru are patru înălțimi.



Fig. 10.1

**Despre volum** Obiectele din jurul nostru ocupă „loc” mai mare sau mai mic. Un dulap de bucătărie, de pildă, dacă este „mai mare” lasă „mai puțin loc” de trecere în jurul său, deci el ocupă „mai mult loc” din „cantitatea de loc” a camerei. Bineînțeles că forțăm puțin modul de exprimare pentru a vorbi de lucruri cunoscute. Sintem conduși în mod firesc să comparăm, într-un fel oarecare, cât loc ocupă un obiect, cu cât loc ocupă alt obiect, din spațiul înconjurător. Apare ideea de a asocia fiecărui corp din spațiu câte un număr, pe care îl vom numi volumul său, care să ne permită să facem astfel de comparații.

Această definiție necesită precizări. În primul rând trebuie arătat că acest număr este același, oricând ar fi alegerea feței tetraedrilor, considerată ca bază, și a înălțimii corespunzătoare ei.

Pentru aceasta, ducem înălțimile fețelor  $ABC$  și  $DBC$  ( $AM = a_2$ ,  $DN = a_1$ ) și înălțimile tetraedrilor  $AQ = h_1$ ,  $DP = h_2$  (fig. 10.2)

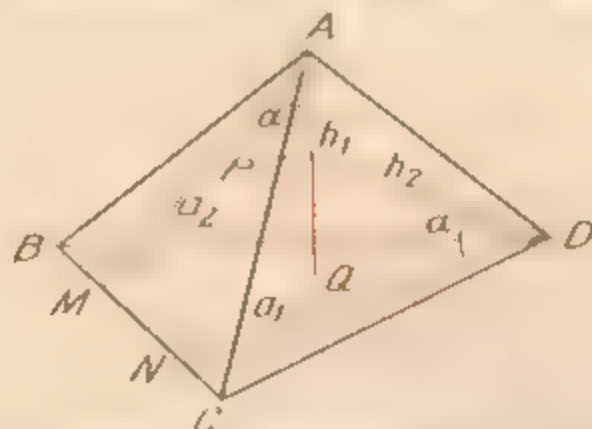


Fig. 10.2

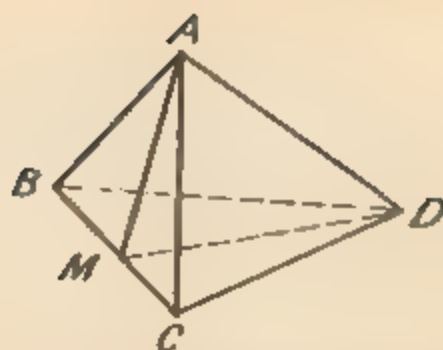
Să demonstrăm egalitatea produselor  $a_1 h_1$  și  $a_2 h_2$ . Pentru aceasta vom constata congruența unghiurilor  $QAM$  și  $PDN$ . Dreptele  $MQ$  și  $ND$  sînt perpendiculare pe  $BC$  ( $DN$  fiind înălțime și  $MQ$  din una dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare). Deci  $MQ \parallel ND$ . La fel,  $MA \parallel PN$ . Înseamnă că  $\angle AMQ = \angle PND$ . Rezultă că și complementele lor sînt congruente ( $\angle MAQ = \angle NDP$ ), ( $\angle MAQ = \alpha$ ). Exprimăm, în două moduri, cosinusul unghiului  $\alpha$ :  $\cos \alpha = \frac{h_1}{a_2} = \frac{h_2}{a_1}$  și, egalînd produsul mezilor cu al extremilor, obținem egalitatea căutată.

Vom nota cu  $S_{BCD}$  și  $S_{BCA}$  arile fețelor  $BCD$ , respectiv  $BCA$ . Să dovedim că  $\frac{S_{BCD}}{3} \cdot h_1 = \frac{S_{BCA}}{3} \cdot h_2 \Leftrightarrow \frac{BC}{6} \cdot a_2 h_2 = \frac{BC}{6} \cdot a_1 h_1 \Leftrightarrow a_1 h_1 = a_2 h_2$ , relație demonstrată. Dar, într-un tetraedru, oricare două fețe au o latură comună, deci oricare ar fi fața aleasă cu înălțimea corespunzătoare, produsul lor este același.

Dacă se dă un tetraedru  $ABCD$  și prin dreapta  $AD$  se duce un plan care taie muchia  $BC$  într-un punct interior  $M$  este evident că suma volumelor tetraedrilor  $ABMD$  și  $ACMD$  este egală cu volumul tetraedrilor  $ABCD$ , pentru că suma arilor  $\angle BMD + \angle CMD$  este aria  $\angle BCD$ , iar înălțimea corespunzătoare acestor fețe este aceeași (fig. 10.3)

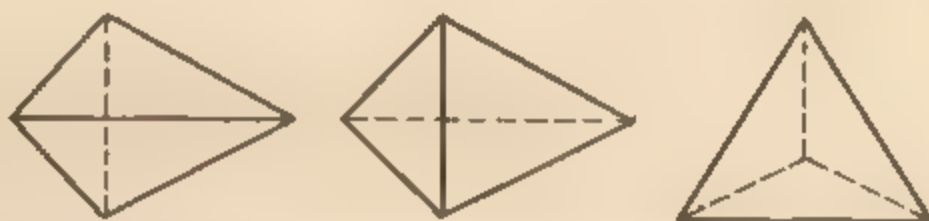


Fig. 10.3



Când desenăm un tetraedru, avem grijă, în general, să figurăm muchiile care nu se văd, punctat. Exemple în fig. 10.4:

Fig. 10.4



*Secțiuni într-un tetraedru.* Intersecția unui plan cu un tetraedru se numește secțiunea determinată de plan în tetraedru.

*O problemă de desen.* Dându-se tetraedrul  $ABCD$  și punctele  $M, N, P$  pe muchiile sale, așa cum ne arată figura 10.5, să desenăm secțiunea determinată în tetraedru de planul ce trece prin  $M, N, P$ .

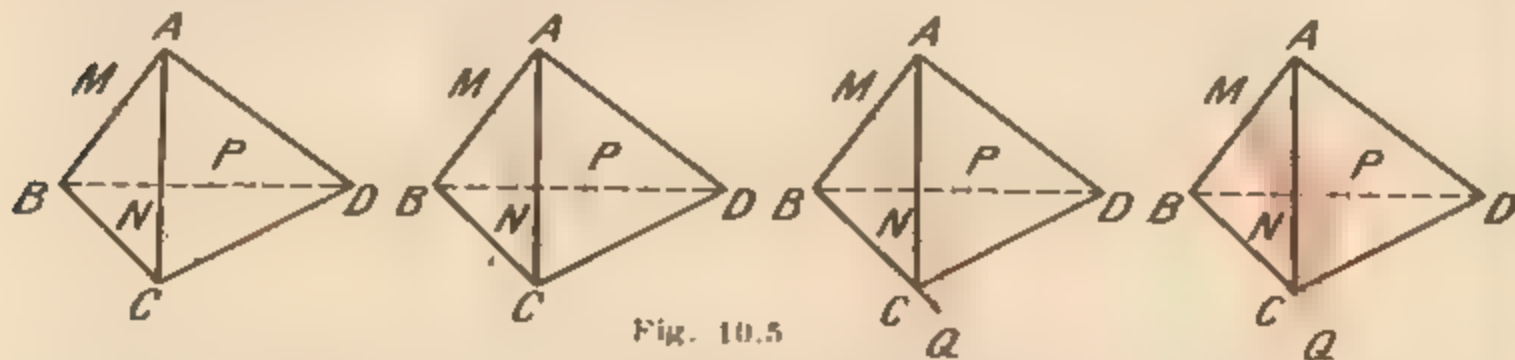


Fig. 10.5

Observăm că segmentul  $MN$  este conținut în fața  $ABC$ , la fel  $MP \subset \subset (ABD)$ . Le figurăm, unind  $M$  cu  $N$  și  $M$  cu  $P$ . Dreapta  $MN$  are comun cu dreapta  $BC$  punctul  $Q$ , care, fiind pe  $BC$ , aparține și planului  $(BCD)$ , la fel ca și punctul  $P$ , deci dreapta  $PQ$  este conținută în planul  $(BCD)$ . Dreapta  $PQ$  intersectează pe  $CD$  în  $T$ . Segmentul  $TP$  este o latură a secțiunii. Punctele  $N$  și  $T$  sînt pe aceeași față, deci secțiunea este poligonul  $NMPT$  cu interiorul său.

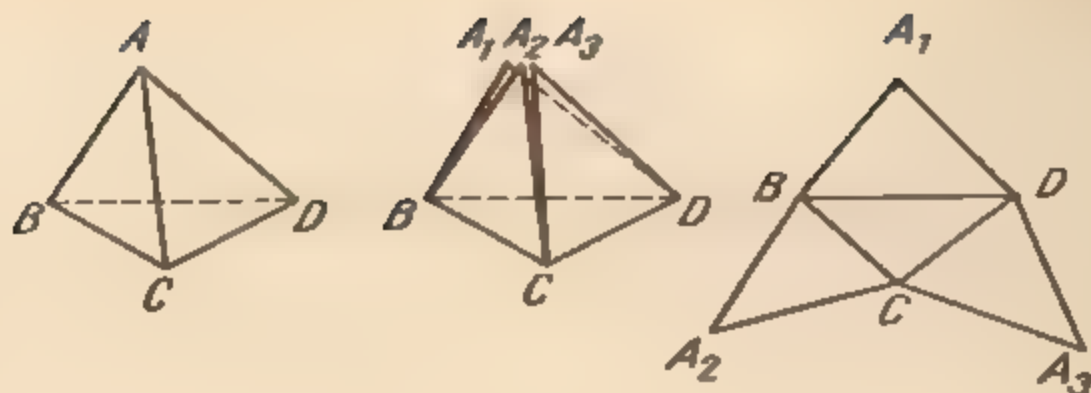


Fig. 10.6

**Desfășurarea unui tetraedru.** Presupunem, prin concretizare, un tetraedru din carton (tetraedru-suprafață deci, nu tetraedru-corp). „Tăindu-l”, de exemplu de-alungul muchiilor  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ , să-i „rabatem” fețele, fără a le deforma, până se ajunge la un poligon plan  $A_1BA_2CA_3D$ , care reprezintă o desfășurare a tetraedrului  $ABCD$ . (Atenție  $A_1B \equiv A_2B$ ,  $A_2C \equiv CA_3$ ,  $A_3D \equiv DA_1$ ) (fig. 10.6).

## PROBLEME 10

1. Un tetraedru are baza un triunghi dreptunghic, cu ipotenuza de 10 cm și o catetă de 8 cm. Înălțimea tetraedrului este de 10 cm. Care este volumul său?

2. Tetraedrul  $VABC$  are fața  $ABC$  un triunghi echilateral cu latura  $8\sqrt{3}$  cm, știind că distanța lui  $V$  la planul  $(ABC)$  este 10 cm, să se afle volumul tetraedrului.

3. Un triunghi dreptunghic  $ABC$  are catetele  $AB = 3$  m și  $AC = 4$  m. În  $A$  se ridică o perpendiculară pe planul triunghiului, pe care se ia un segment  $AV = 2,4$  m. Să se afle:

- volumul tetraedrului  $VABC$ ;
- aria totală a tetraedrului  $VABC$ ;
- unghiul plan al diedrului format de fața  $VBC$  și planul triunghiului  $ABC$ .

4. Tetraedrul  $VABC$  are fața  $ABC$  un triunghi isoscel ( $AB = AC$ ), iar piciorul perpendicularei din  $V$  pe planul  $(ABC)$  este punctul  $A$ . Știind că:  $AB = AC = 5$  m,  $BC = 6$  cm și  $AV = 3$  m, să se calculeze aria totală și volumul tetraedrului.

5. Pe perpendiculara în  $A$  pe planul dreptunghiului  $AECD$  se ia punctul  $M$ , astfel încât  $MB = 20$  cm,  $MC = 5\sqrt{17}$  cm și  $MD = 13$  cm. Se cere:

- să se demonstreze că triunghiurile  $MBC$  și  $MDC$  sînt dreptunghice;
- să se calculeze volumul tetraedrului  $MABC$ .

6. Tetraedrul  $VABC$  are fața  $ABC$  un triunghi echilateral, iar distanța lui  $V$  la planul  $ABC$  este de 8 cm. Știind că raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$  este  $R = 4\sqrt{3}$  cm, să se afle volumul tetraedrului.

7. Intersectind un tetraedru regulat cu un plan ce trece prin mijloacele a trei muchii ce pornesc din același vîrf, să se determine forma și aria secțiunii în funcție de latura „ $a$ ” a tetraedrului.

8. Cunoscind latura „ $a$ ” a unui tetraedru regulat, să se calculeze aria totală și volumul tetraedrului.

9\*. Găsiți o desfășurare a unui tetraedru regulat, astfel încît fiecare față să aibă cel mult două laturi comune cu o altă față. Arătați că, în acest caz, două din laturile poligonului obținut sînt paralele și congruente.

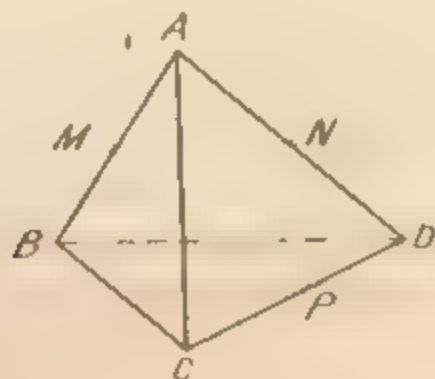


Fig. 10.7

10. În figura 10.7 punctele  $M$ ,  $N$ , sînt mijloacele muchiilor  $AB$  și  $AD$ , iar  $P$  un punct interior muchiei  $CD$ . Să se determine natura secțiunii determinate în tetraedru, de planul ce trece prin  $M$ ,  $N$ ,  $P$  și să se deseneze această secțiune.

11. Fie  $ABCD$  un tetraedru și  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  centrele de greutate ale fețelor opuse vîrfurilor  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Să se arate că  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  și  $DD'$  sînt concurente într-un punct  $G$ .

12\*. Un triunghi ascuțitunghic „se îndoaie” de-a lungul liniilor mijloci pînă se obține un tetraedru. Să se arate că o înălțime a tetraedrului obținut cade în ortocentrul triunghiului inițial.

13. Să se arate că perpendicularele în centrele cercurilor circumscrise fețelor unui tetraedru sînt concurente.

14. Dacă într-un tetraedru cu toate fețele triunghiuri dreptunghice se întîlnesc într-un vîrf două unghiuri drepte, atunci mai există un vîrf al tetraedrului, în care se întîlnesc două unghiuri drepte.

15. Fie  $OABC$  un tetraedru astfel încît  $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ . Să se arate că pătratul ariei feței  $ABC$  este egal cu suma pătratelor ariilor fețelor  $OAB$ ,  $OAC$ ,  $OBC$ .

16. Fie  $ABCD$  un tetraedru în care  $AB \perp CD$ . Să se arate că piciorul perpendicularei din  $A$  pe planul  $BCD$  cade pe înălțimea din  $B$  a triunghiului  $BCD$ . Dacă, în plus,  $AC \perp BD$ , atunci  $AD \perp BC$  și înălțimile tetraedrului sînt concurente.

## PRISMA

Să considerăm, în spațiu, un poligon — presupus plan pentru a simplifica lucrurile, numit *poligon director* — și o dreaptă  $d$ , care nu este paralelă cu planul poligonului. O dreaptă care se „mișcă”, sprijinindu-se pe poligonul director și rămâne, tot timpul, paralelă cu  $d$ , generează o suprafață pe care o numim suprafață prismatică. Cu alte cuvinte:

*ă prismatică (fig. 11.1).*

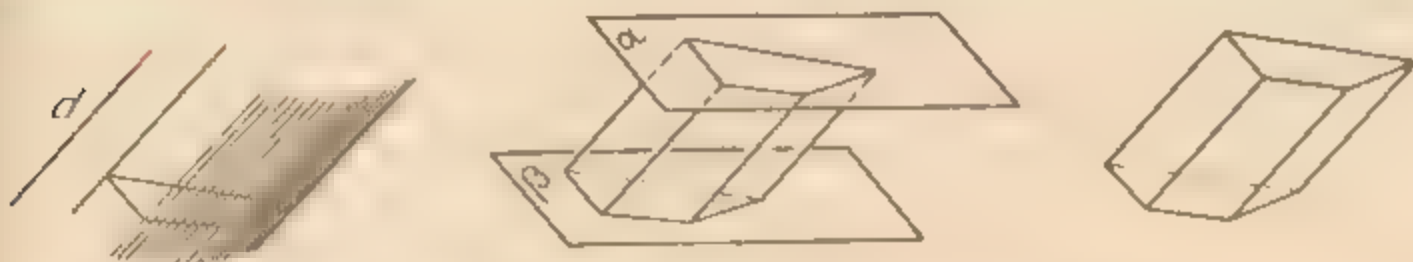


Fig. 11.1

Intersecțiind această suprafață cu două plane paralele ( $\alpha$  și  $\beta$ ), se obțin, în aceste plane, două poligoane cu laturile respectiv paralele și concurente și, în zona dintre cele două plane, un număr de paralelograme egal cu cel al laturilor poligonului director. Poligoanele din planele paralele, împreună cu interioarele lor, se numesc baze, paralelogramele, cu interioarele lor, de pe suprafața prismatică, fețe laterale. Reuniunea fețelor laterale cu bazele formează suprafața prismei.

*prismei.*

Un punct interior segmentului care unește două puncte de pe fețe diferite și care nu se găsește pe aceeași muchie, se numește punct interior prismei. Mulțimea punctelor interioare reunită cu suprafața prismei alcătuiesc corpul numit prismă.

Uneori, ca să nu mai lungim exprimarea, vom numi prismă numai suprafața sa.

Dacă muchiile laterale sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci *prisma se numește dreaptă*, iar fețele ei laterale sînt dreptunghiuri.

La o prismă *distanța dintre baze se numește înălțime*. (Reamintim că distanța dintre două plane este lungimea segmentului de dreaptă determinat de plane pe perpendiculara comună.)

La prisma dreaptă înălțimea este cît muchia laterală.

Prisme se deosebesc, ca denumire, după numărul laturilor poligonului de bază (de exemplu, în fig. 11.2 prismă triunghiulară, prismă patrulateră, prismă pentagonală).





Fig. 11.2

*Paralelipipedul este o prismă cu bazele paralelograme, deci are toate fețele paralelograme. El poate fi considerat prismă în trei „moduri” diferite. Oricare din paralelogramele care determină fețele paralelipipedului poate fi considerat poligon director. Dacă fețele laterale sînt dreptunghiuri, adică dacă muchia laterală este perpendiculară pe bază, *paralelipipedul se numește drept*. (Observăm că această denumire este arbitrară: dacă alegem ca bază o față laterală, paralelipipedul drept ne apare acum oblic.) (fig. 11.3).*

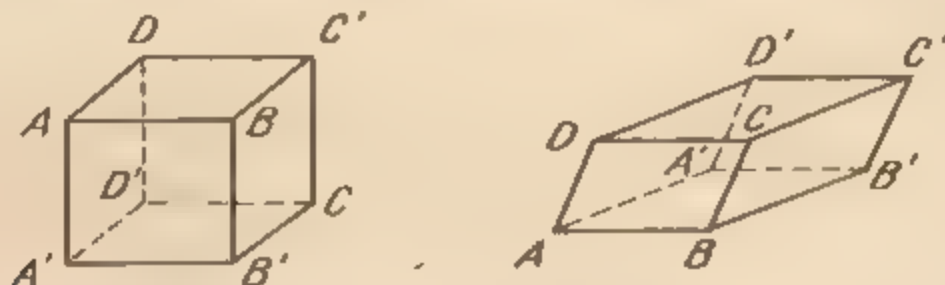


Fig. 11.3

Un paralelipiped cu toate fețele dreptunghiuri *se numește dreptunghic*.

Vom spune deci că un paralelipiped dreptunghic este o prismă dreaptă în trei moduri diferite, iar un paralelipiped drept este o prismă dreaptă numai într-un singur mod. Evident orice paralelipiped dreptunghic este drept, nu însă orice paralelipiped drept este dreptunghic.

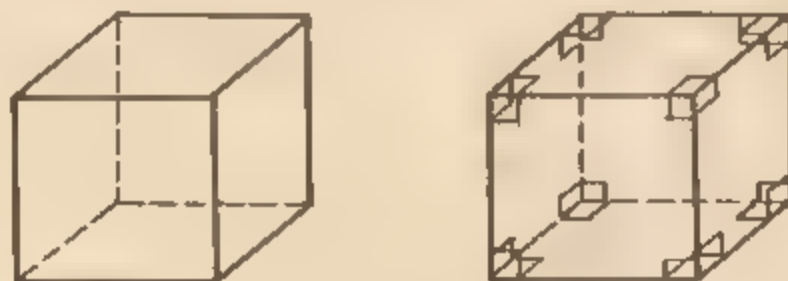


Fig. 11.4

*Observație:* Ultima propoziție pare mai simplu de înțeles decît de desenat, pentru că bazele, din cauza perspectivei, ne apar și la cel drept și la cel dreptunghic tot paralelograme, care nu sînt dreptunghiuri (fig. 11.4). În figură, ca să evităm confuzia, am marcat și pe bază unghiurile drepte.

1. O prismă exagonală regulată dreaptă are toate muchiile de 2 cm (și muchiile de la bază și muchiile laterale). Să se calculeze aria laterală.
2. Pe muchiile  $AA'$ ,  $BB'$  și  $CC'$  ale unei prisme triunghiulare  $ABCA'B'C'$ , alegem punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$ .
  - a) Să se arate că dacă  $G$  este punctul de întâlnire al medianelor triunghiului  $ABC$ , iar  $S$  cel al medianelor triunghiului  $MNP$ , atunci  $GS \parallel AA'$ .
  - b) Cunoșcând că  $AM = 6$  cm,  $BN = 8$  cm,  $CP = 10$  cm, să se calculeze  $GS$ .
  - c) Să se rezolve problema în cazul  $AM = a$ ,  $BN = b$ ,  $CP = c$ .
3. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un paralelipiped. Să se arate că mijloacele muchiilor  $AA'$ ,  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$  și  $DA$  sînt coplanare și formează un hexagon cu laturile opuse paralele și congruente.
4. Să se descrie toate tipurile de secțiuni ale unei prisme triunghiulare cu un plan.
5. Aceeași problemă pentru o prismă patrulateră.
6. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un paralelipiped dreptunghic. Fie  $N$  mijlocul lui  $AB$ ,  $P$  al lui  $BC$ ,  $M$  al lui  $A'D'$ ,  $R$  al lui  $D'C'$ . Să se arate că:
  - a)  $MR$  și  $NP$  sînt congruente și paralele;
  - b)  $MN$  și  $RP$  sînt paralele.
7. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un paralelipiped. Prin punctul  $O$  de intersecție a dreptelor  $AC'$  și  $A'C$  ducem un plan oarecare  $\alpha$ . Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unei baze la planul  $\alpha$  este egală cu suma distanțelor vîrfurilor celeilalte baze la  $\alpha$ .

*Diagonala paralelipipedului dreptunghic* este segmentul de dreaptă care unește două vîrfuri, care nu sînt pe aceeași față (de exemplu  $A'D$  din figura 12.1). Într-un paralelipiped există patru diagonale. Presupunem, în această figură, că dimensiunile paralelipipedului sînt  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , și diagonala  $A'D = d$ . Să demonstrăm că:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

formulă utilă pentru calculul diagonalei și care este teorema lui Pitagora în spațiu (fig. 12.1).

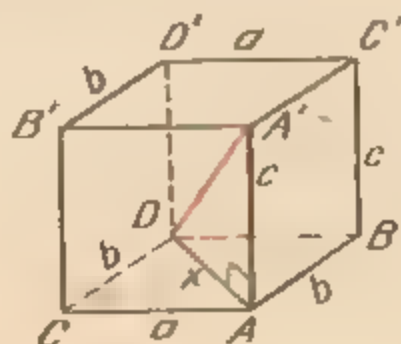


Fig. 12.1

În triunghiul dreptunghic  $ABD$  ( $\angle B = 90^\circ$ ):  $x^2 = a^2 + b^2$ , ( $x = AD$ ).

În triunghiul dreptunghic  $AA'D$  ( $\angle A'AD = 90^\circ$ ):  $d^2 = c^2 + x^2 = c^2 + a^2 + b^2$ , și relația este demonstrată.

*O problemă de secțiune.* Se dă cubul din figura 12.2 cu notațiile ei, unde:  $M \in DD'$ ,  $N \in C'C$ ,  $P \in AB$ . Să se deseneze secțiunea determinată de  $MNP$  în cub.

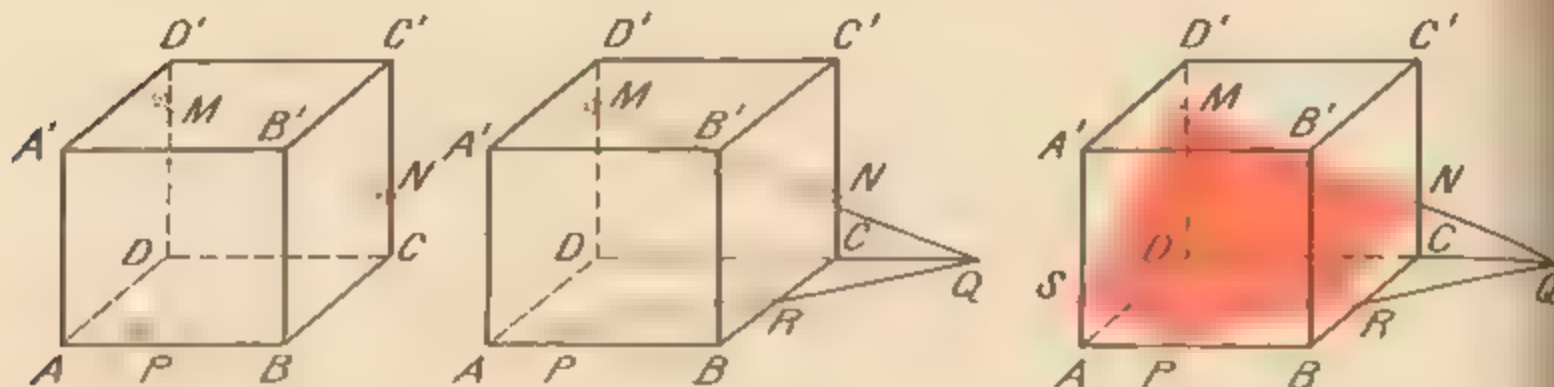


Fig. 12.2

Unim  $M$  cu  $N$  (sînd pe aceeași față), prelungim dreapta lor pînă taie pe  $DC$  în  $Q$ , care aparține deci planului  $(C'CD)$ . Unim  $Q$  cu  $P$ . Notăm  $R = CB \cap PQ$ . Am obținut segmentul  $NR$  al secțiunii. Ducem, pe fața  $AA'D'D$ ,  $MS \parallel NR$ , ( $S \in A'A$ ). Unim  $S$  cu  $P$ . Secțiunea căutată este  $PRNMS$ .

După cum li alegem baza, sîntem obișnuiți, la un paralelipiped dreptunghic, să numim muchiile de mărimi diferite: lungime, lățime și înălțime; lungimea și lățimea sînt laturile bazei, în această ordine (lungimea este mai mare decît lățimea). Numim uneori lungimea, lățimea și înălțimea, „cele trei dimensiuni ale paralelipipedului”. Dacă le notăm cu  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , aria totală a paralelipipedului dreptunghic va fi:

(fig. 12.3)  $a$  = lungime,  $b$  = lățime,  $c$  = înălțime.

Fig 12 3

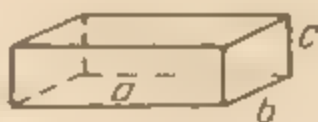
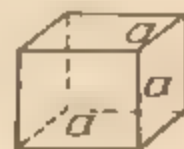


Fig 12 4



Un caz particular de paralelipiped dreptunghic este *cubul*, care are toate muchiile congruente, deci toate fețele sînt pătrate. Notînd lungimea muchiei lui cu  $a$ , aria sa totală va fi (fig. 12.4).

*Desfășurarea paralelipipedului dreptunghic.* La fel ca la tetraedru, prin „tăiere de-a-lungul muchiilor și rabatare”, se obține un poligon plan. Considerăm figura 12.5 destul de elocventă...

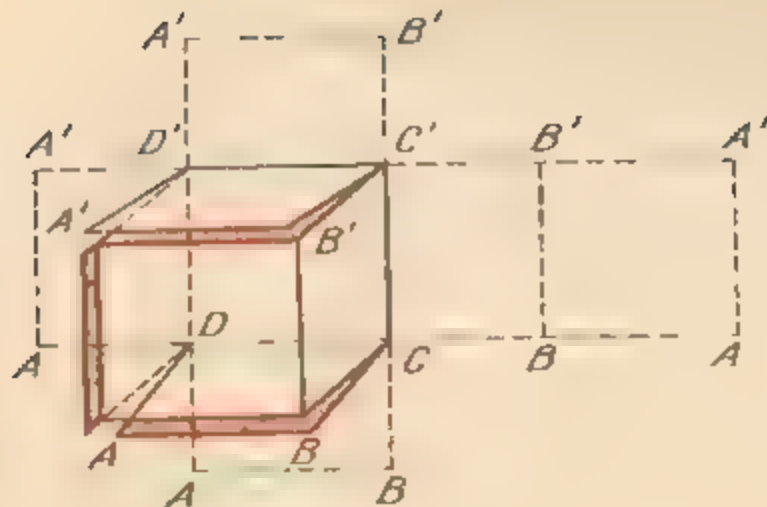


Fig. 12.5

Mai există și alte moduri de desfășurare a unui paralelipiped. Găsiți și voi un exemplu.

*Observație* Numim prismă concavă, o prismă cu poligoanele de bază concave\*, conștientăm că există și prisme concave nedesfășurabile (fig. 12.6).

Fig. 12.6



## PROBLEME 12

1. Un paralelipiped dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  are dimensiunile  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm și  $AA' = 12$  cm. Să se calculeze:
  - a) lungimea diagonalei sale;
  - b) distanța de la punctul  $C$  la dreapta  $AC'$ .
2. Un paralelipiped drept  $ABCD A' B' C' D'$  are baza  $ABCD$  un romb cu latura de 8 cm și unghiul  $A$  de  $120^\circ$ . Ștind că muchia laterală a paralelipipedului este de 6 cm, să se calculeze:
  - a) aria laterală a paralelipipedului;
  - b) lungimea segmentelor  $A'C$  și  $BD'$ .
3. Un cub are muchia  $a$ . Să se afle distanțele de la vîrfurile sale la o diagonală
4. Un paralelipiped drept are laturile bazei de 6 cm și 10 cm și unghiul dintre ele de  $60^\circ$ , ștind că înălțimea paralelipipedului este de 12 cm, să se afle aria sa totală.

\* În general, o mulțime de puncte o numim convexă, dacă unind cu un segment oricare două puncte ale ei, interiorul acestuia este conținut, în întreg me, în această mulțime. Se arată că în cadrul poligoanelor plane acest fapt revine la a spune că poligonul se găsește în întregime de aceeași parte a dreptei-suport a oricărei laturi



5. Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un cub (figura 12.7).

a) Dintre planele determinate de punctele din figură, să se indice unul care este perpendicular pe muchia  $AB$ .

b) Să se indice o dreaptă determinată de punctele din figură, perpendiculară pe dreapta  $AC'$ .

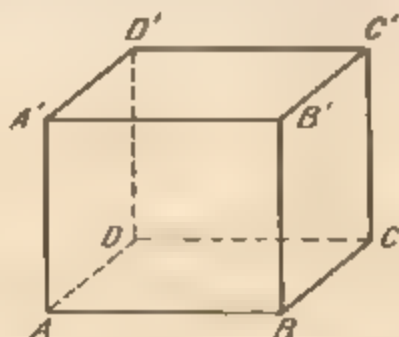


Fig. 12.7

6. Să se demonstreze că într-un cub  $ABCD A' B' C' D'$  perpendiculara din  $D$  pe diagonala  $AC'$  o taie pe aceasta într-un punct  $Q$ , astfel încât  $\frac{AQ}{AC'} = \frac{1}{3}$ .

7. Fie  $ABCD A' B' C' D'$  un paralelipiped dreptunghic cu  $AB = 9$  cm,  $AD = 15$  cm și  $AA' = 20$  cm. Se cere distanța lui  $B'$  la diagonala  $AD'$ .

8. Un paralelipiped  $ABCD A' B' C' D'$  are baza  $ABCD$  un pătrat. Muchiile laterale formează cu planul bazei unghiuri de  $30^\circ$ , iar planele  $AA' B' B'$  și  $DD' C' C'$  sînt perpendiculare pe planul bazei. Cunoscînd că  $AB = 4$  cm și  $AA' = 6$  cm, să se calculeze aria totală a paralelipipedului.

9. Fie  $ABCA' B' C'$  o prismă dreaptă, cu baza  $ABC$  un triunghi dreptunghic în  $A$ , cu  $AB = 15$  cm,  $AC = 20$  cm și  $AA' = 30$  cm. Fie  $M$  mijlocul lui  $CC'$ . Să se determine forma și perimetrul secțiunii prismei cu planul determinat de punctele  $A'$ ,  $M$ ,  $B$ .

10. Într-un paralelipiped dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ , cu baza  $ABCD$  un pătrat, înălțimea este de 3 cm, iar dreptunghiul  $ABB' A'$  are aria de  $21$  cm<sup>2</sup>. Să se afle dimensiunile paralelipipedului.

11. Se dă un paralelipiped drept cu baza un romb, în care se cunosc: înălțimea  $h$ , latura  $a$  a rombului, precum și un unghi ascuțit  $\theta$ , al rombului. Să se calculeze, în funcție de  $a$ ,  $h$ ,  $\theta$ , diagonalele paralelipipedului.

12. Să se determine, în cuburile din figura 12.8, secțiunile determinate de planele ce trec prin punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$ .

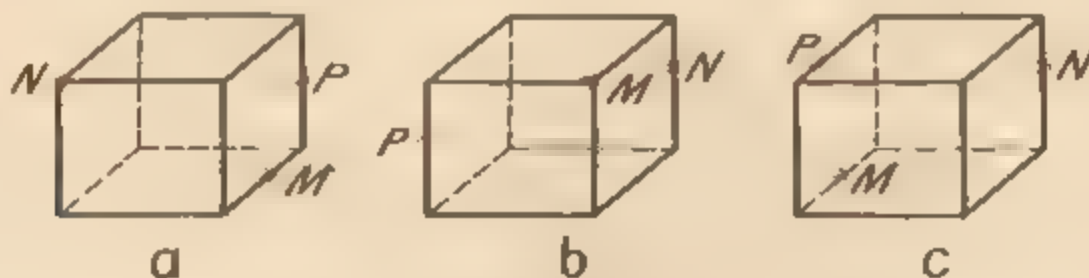


Fig. 12.8

(Figurile se vor copia întocmai pe caiet.)

13. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5 știind că diagonala paralelipipedului este de  $2\sqrt{38}$  cm, să se afle dimensiunile paralelipipedului.

14. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel  $ABC$ , ( $AB \cong AC$  și  $AB = a$ ), ducem perpendiculara  $AA' = a$ . Din  $A'$  ducem un segment  $A'D = a\sqrt{2}$ , perpendicular pe  $AA'$ . Dacă  $BD$  este perpendiculară pe  $AB$  și dacă  $D$  este de aceeași parte a planului  $AA'B$  ca și  $C$ , atunci triunghiul  $DBC$  este echilateral.

## VOLUMUL UNEI PRISME TRIUNGHIULARE

Înainte de a-l defini, vom face următoarea constatare:

(fig. 13.1).

$$\left. \begin{aligned} \triangle BCD &= \triangle B'C'D' \Rightarrow S_{BCD} = S_{B'C'D'} \\ &h = h' \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$V_{ABCD} = \frac{S_{BCD} \cdot h}{3}$$

$$V_{A'B'C'D'} = \frac{S_{B'C'D'} \cdot h'}{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = V_{A'B'C'D'}$$

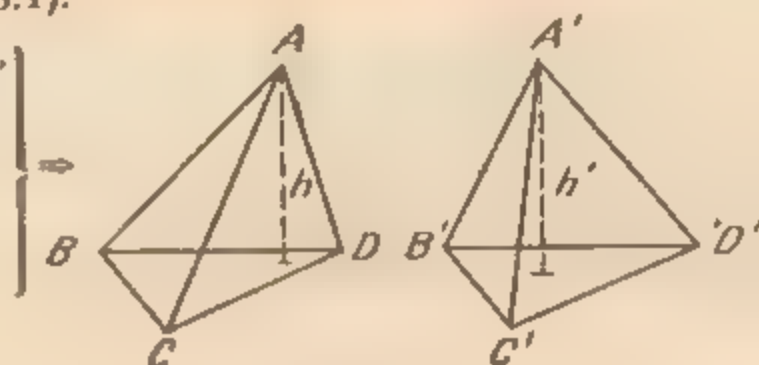


Fig. 13.1

Să demonstrăm următoarea:

**Lemă.**

*Teorema (cu același volum)*

Considerăm prisma triunghiulară  $ABCA'B'C'$ , și prin punctele  $C, A', B'$  ducem o secțiune plană. Vom obține astfel două corpuri: tetraedrul  $CA'B'C'$  și corpul  $ABCA'B'$  (fig. 13.2). Vom nota tetraedrul cu  $P_1$ . Ne vom ocupa,

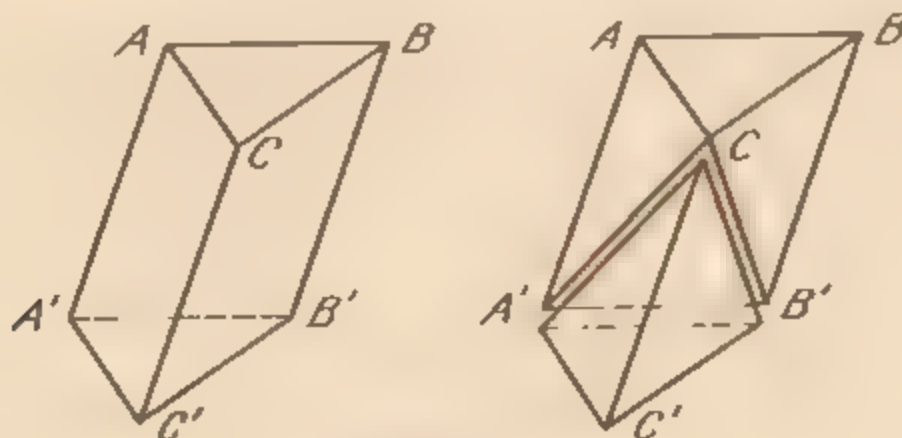


Fig. 13.2

acum, de cel de al doilea corp. Secționind corpul  $ABCA'B'$  cu planul determinat de punctele  $A', C, B$ , vom nota cele două tetraedre obținute (fig. 13.3) cu  $P_2$  și cu  $P_3$  (tetraedrul  $ACBA'$  este  $P_2$  și  $A'B'BC$  este  $P_3$ ). Am obținut

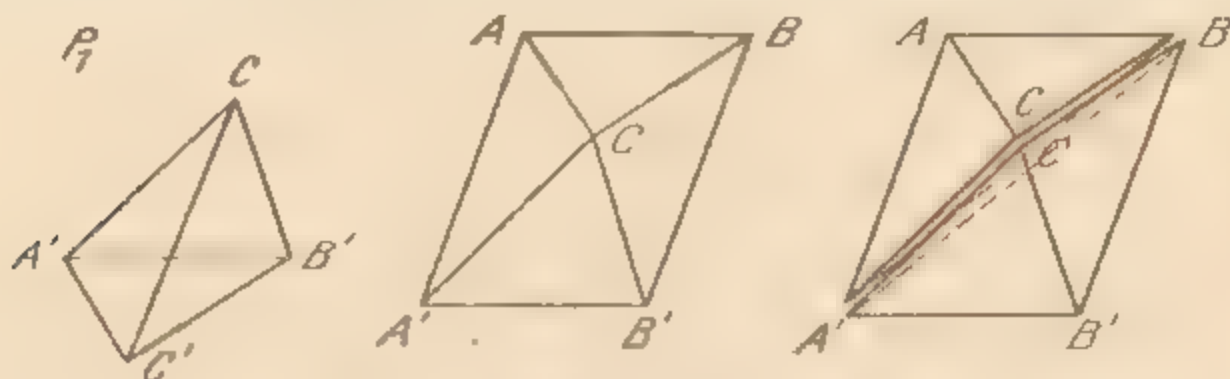


Fig. 13.3

astfel trei tetraedre (fig. 13.4). Ele sînt echivalente două cîte două.  $P_1 \approx P_2$  deoarece au bazele  $ABC$  și  $A'B'C'$  triunghiuri congruente și înălțimea corespunzătoare lor aceeași (este în fond înălțimea prismei, adică distanța dintre

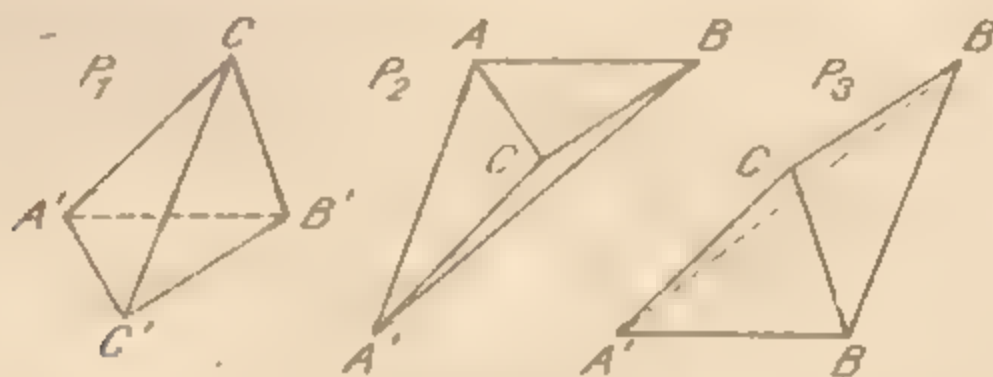


Fig. 13.4

planele bazelor ei).  $P_2 \approx P_3$  pentru că au două baze respectiv congruente  $ABA'$  și  $BA'B'$  ca jumătăți din același paralelogram și aceeași înălțime distanța de la  $C$  la planul paralelogramului  $ABB'A'$ . Deci,  $P_1 \approx P_2 \approx P_3$  și teorema este demonstrată pentru prisma triunghiulară.

Acesta nu este însă singurul mod de a împărți, de a secționa prisma în trei tetraedre echivalente. Expresia volumului lui  $P_1$  și egalitatea celor trei volume ne conduce să afirmăm că.

Orice prismă poate fi împărțită într-un număr de prisme triunghiulare: ducem în planele bazelor, din două vîrfuri de pe aceeași muchie laterală (de pildă  $A, A'$ ), toate diagonalele bazelor. Cu secțiunile pe care le determină două

astfel de diagonale paralele (fig. 13.5), (de exemplu  $AC$  și  $A'C'$ ) separăm, tăiem prisma în mai multe prisme triunghiulare ( $n - 2$ , dacă  $n$  este numărul laturilor poligonului de bază). Volumul prisme mari este suma volumelor acestor prisme triunghiulare, și cum înălțimile lor sînt egale, putem spune că: *Volumul unei prisme este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea.*

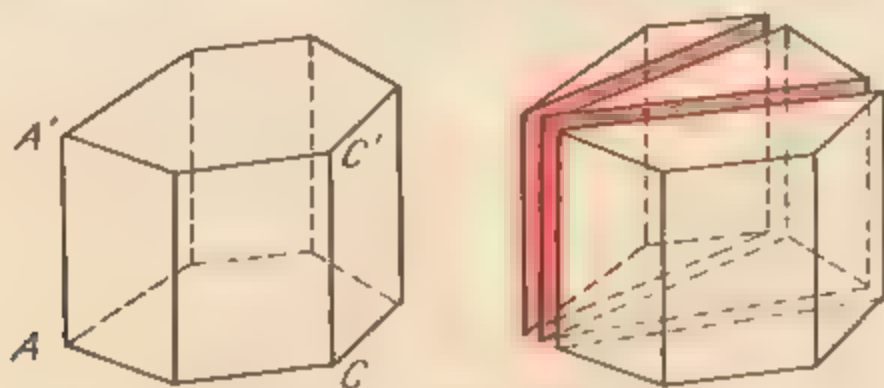


Fig. 13.5

melor acestor prisme triunghiulare, și cum înălțimile lor sînt egale, putem spune că: *Volumul unei prisme este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea.*

$$V_{pr} = A_{bazei} \cdot h.$$

dacă el prisma este un dreptunghi, atunci  $a = b = c$  și  $V = a^3$  (fig. 13.6), iar dacă el este un cub, atunci  $a = b = c$  și  $V = a^3$  (fig. 13.7).

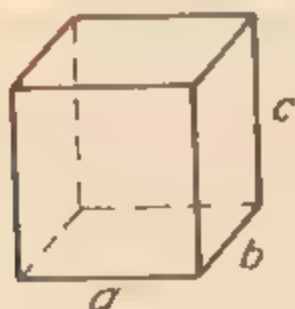


Fig. 13.6

$$V = a \cdot b \cdot c$$

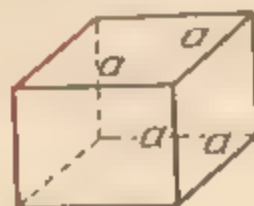


Fig. 13.7

$$V = a^3$$

### PROBLEME 18

1. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi echilateral cu latura de 6 cm. Știind că aria laterală a prisme este de  $288 \text{ cm}^2$ , să se afle volumul prisme.
2. O prismă are baza un paralelogram cu dimensiunile 6 cm și 8 cm și unghiul ascuțit egal cu  $60^\circ$ . Știind că înălțimea prisme este de 10 cm, să se afle volumul prisme.
3. O prismă hexagonală regulată dreaptă are aria totală de  $224\sqrt{3} \text{ m}^2$  și cea laterală de  $200\sqrt{3} \text{ m}^2$ . Să se calculeze volumul prisme.
4. O prismă triunghiulară are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de 5 m și 12 m. Muchiile laterale sînt egale cu 6 m și fac cu planul bazei unghiuri de  $45^\circ$ . Să se afle volumul prisme.

5.\* O prismă dreaptă are ca bază un pătrat de latură  $a$ . Ștind că diagonala prismei formează cu o față laterală ce pornește din același vîrf un unghi de  $30^\circ$ , să se afle volumul prismei.

6. Baza unei prismе oblice este patrulaterul  $ABCD$  în care diagonalele sînt perpendiculare între ele. Secțiunea diagonală  $AA'C'C$  este perpendiculară pe planul bazei și are aria egală cu  $a^2$ , iar diagonala  $BD = b$ . Să se afle volumul prismei.

7. Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$  cu dimensiunile  $AB = 16$  cm,  $BC = 12$  cm și  $AA' = 3,2$  cm. Pe muchia  $AB$  se ia  $AI = 4$  cm, iar pe muchia  $AD$  se ia  $AL = 3$  cm și se secționează paralelipipedul cu planul  $A'IL$ . Se cere:

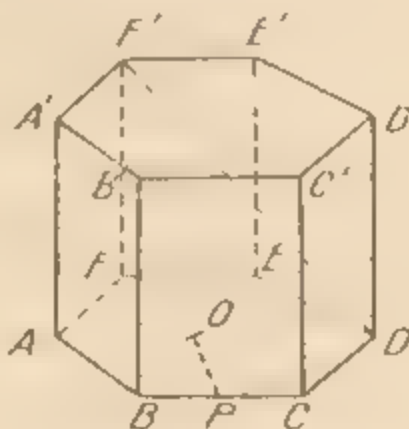
- volumul poliedrului rămas după înlăturarea tetraedrului  $A'AIL$ ;
- aria totală a poliedrului rămas.

8. O prismă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are diagonala de 13 cm și raza cercului circumscris bazei de 6 cm. Să se afle volumul prismei.

9. În figura 13.8 este desenată o prismă hexagonală regulată dreaptă. Ștind că  $EB' = 26$  cm și apotema bazei  $OP = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  cm, să se determine volumul și aria laterală a prismei.

10. În figura 13.8, care reprezintă o prismă hexagonală regulată dreaptă, se cunosc  $AB = 6$  cm și  $F'D = 12$  cm. Să se calculeze aria totală și volumul prismei.

Fig. 13.8



11. O prismă oblică are bazele hexagoane regulate  $ABCDEF$  și  $A'B'C'D'E'F'$  și ca înălțime  $AO$ ,  $O$  fiind centrul bazei  $ABCDEF$ . Dacă latura hexagonului este de 4 cm și  $\angle AA'O = 60^\circ$ , să se calculeze:

- volumul prismei;
- unghiul feței  $ABB'A'$  cu planul bazei (Valoarea unei funcții trigonometrice a acestui unghi.)

12. Pe o masă se găsește o vază plină cu apă, avînd forma unui paralelipiped drept unghic, cu baza un pătrat de latură 8 cm și înălțimea egală cu 12 cm. Se înclină vasul, astfel încît una din muchiile bazei să răzîndă pe masă, pînă cînd porțiunile neudate ale muchiilor au lungimea de 4 cm. După aceasta vasul revine în poziția inițială. La ce înălțime se ridică apa rămasă?

13\*. Un tetraedru are fețele laterale triunghiuri isoscele cu unghiurile de la vîrfurile comune format de laturile congruente de  $30^\circ$  și muchia laterală  $a$ . Să se afle volumul tetraedrului.



14\*. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu  $a$  și toate fețele sînt romburi, avînd un unghi ascuțit de  $60^\circ$ . Să se calculeze volumul paralelipipedului.

15. În cubul  $ABCD A' B' C' D'$  de muchie  $a$ ,  $O$  este centrul său,  $O_1$ , cel al feței  $ABCD$ ,  $O_2$ , cel al feței  $BB' C' C$ ,  $O_3$  al feței  $CDD' C'$ ,  $M$  mijlocul lui  $DC$ ,  $N$  mijlocul lui  $CC'$ ,  $P$  al lui  $CB$ . După înlăturarea cubului,  $O_1 P C M O_2 N O_3$ , cum s-a modificat aria corpului rămas față de aria totală a cubului. Dar volumul?

16. În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ ,  $M$  este mijlocul muchiei  $AD$ , iar  $N$  este mijlocul muchiei  $CD$ . Știind că  $MN = 5\sqrt{2}$  m, să se afle volumul și aria totală a cubului.

17. În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ ,  $N$  este mijlocul muchiei  $C' B'$ . Segmentul  $AN = 3$  dm. Să se afle aria totală și volumul cubului.

18. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este de 48 m, iar diagonala de  $5\sqrt{2}$  m. Să se afle aria totală a paralelipipedului.

19. O prismă dreaptă cu baza un trapez oarecare  $ABCD$ , cu  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 25$  cm,  $CD = 8$  cm,  $BC = 13$  cm și înălțimea de 5 cm, este secționată cu două plane paralele ce trec prin  $D$  și  $C$  și sînt perpendiculare pe  $CD$ . Să se calculeze volumele și ariile corpurilor formate, știind că înălțimea prismei este de 10 cm

## PIRAMIDA

O piramidă este definită de un poligon plan, pe care îl numim și  
un punct exterior planului său, pe care îl numim Unim acest  
punct cu toate vîrfurile poligonului plan (fig. 14.1) Un triunghi care are un  
vîrf în vîrfurile piramidei și latura opusă vîrfului este o latură a bazei se numește  
(Considerăm fața piramidei cu interiorul ei cu tot.)



Fig. 14.1

Segmentul (cu interiorul său), care unește vîrfurile piramidei cu un vîrf al  
bazei se numește Laturile poligonului de la baza piramidei  
se numesc Muchiile laterale ale piramidei, împreună cu  
muchii de la bază se numesc Reuniunea punctelor din  
interiorul fețelor laterale, a muchiilor laterale, a muchiilor de la bază și a

interiorului bazei alcătuiește Interiorul piramidei și definește în mod asemănător ca la tetraedru și la prismă.

Citeodată însă prin piramidă vom înțelege numai suprafața sa.

Distanța dintre vîrf și planul bazei se numește *înălțime*. Luată astfel, înălțimea este un număr. În unele probleme o vom considera și ca segment cu un capăt în vîrf și cu celălalt în planul bazei (fig. 14.2).

Înălțimea unei piramide poate să cadă

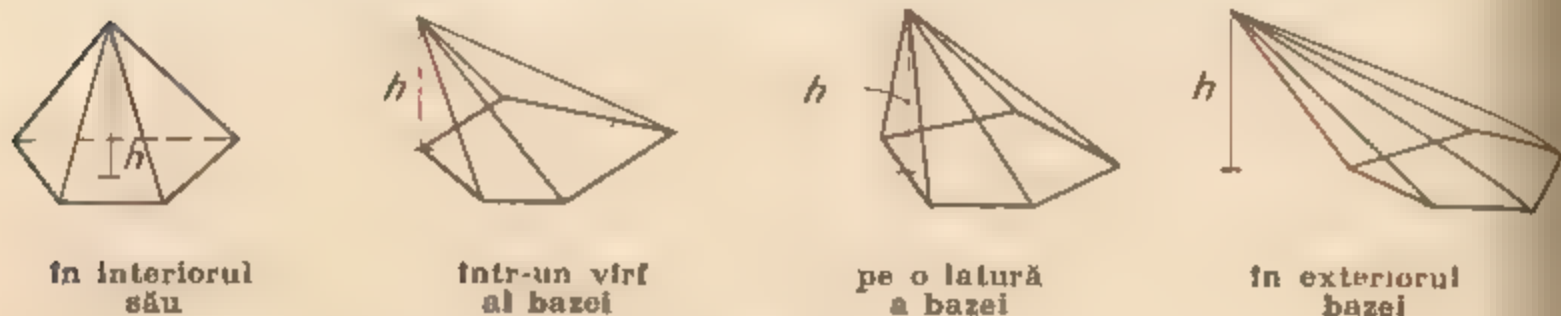


Fig. 14.2

După natura poligonului de bază, piramida se numește patrulateră, exagonală etc., tetraedrul este în fond o piramidă triunghiulară.

Dacă baza piramidei este un poligon regulat, iar înălțimea coborîtă din vîrfurile piramidei trece prin centrul bazei, piramida se numește „regulată”.

Într-o piramidă regulată,

Ea este ipotenuza într-un triunghi dreptunghic în care catetele sînt înălțimea piramidei și apotema bazei. Aplicînd teorema lui Pitagora obținem, cu notațiile din figura 14.3:

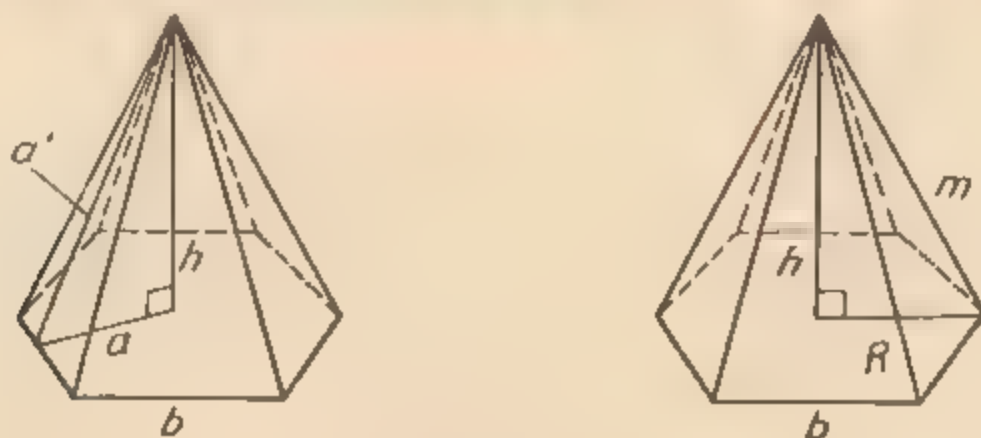


Fig. 14.3

Dacă notăm cu  $R$  raza cercului circumscris bazei și cu  $m$  muchia laterală a piramidei, putem exprima, cu ajutorul teoremei lui Pitagora, înălțimea, încă într-un mod: Se mai poate stabili o legătură între

elementele bazei unei piramide regulate, tot cu ajutorul teoremei lui Pitagora:

$$a'^2 + \frac{b^2}{4} = R^2.$$

piramidei regulate, ea se obține din formula

In cazul piramidei regulate, unde  $p$  este perimetrul

bazei, sau  $A_{lat} = \frac{n \cdot b \cdot a'}{2}$ , unde  $n$  este numărul laturilor bazei,  $b$  latura bazei,  $a'$  apotema piramidei. Într-adevăr, avem  $n$  fețe laterale și aria fiecăreia este  $\frac{b \cdot a'}{2}$ .

Se

obține, în cazul piramidei regulate:  $A_{tot} = \frac{n \cdot b \cdot (a + a')}{2}$  sau

Dar mai jos două moduri de a „desfășura” o piramidă. (Expresia „a desfășura” are același înțeles ca la tetraedru și paralelipiped (fig. 14.4 și fig. 14.5).

Fig. 14.4

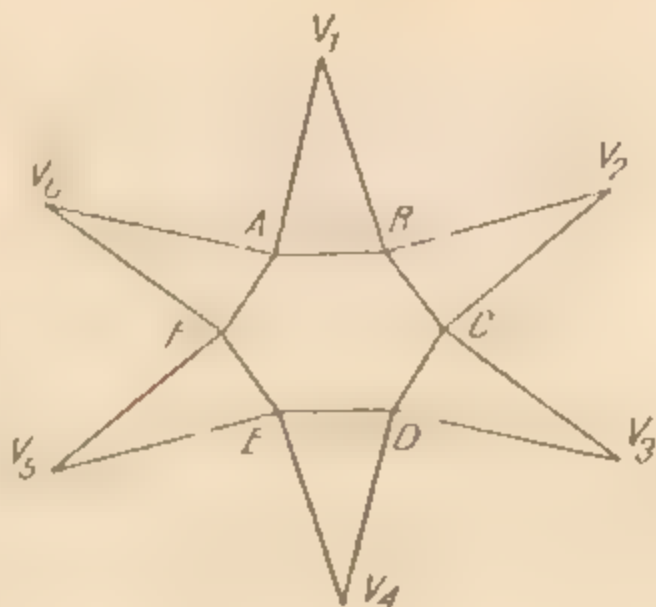
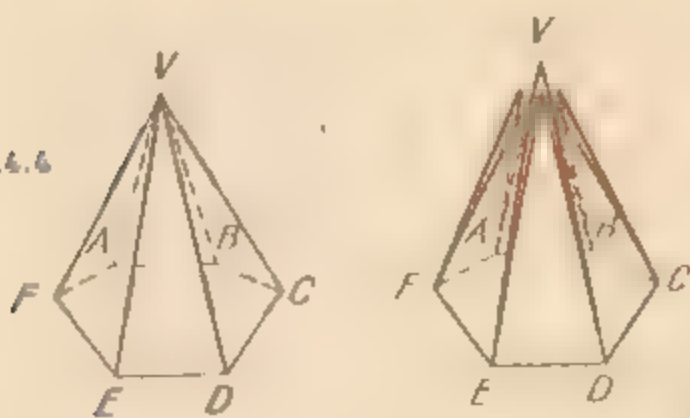
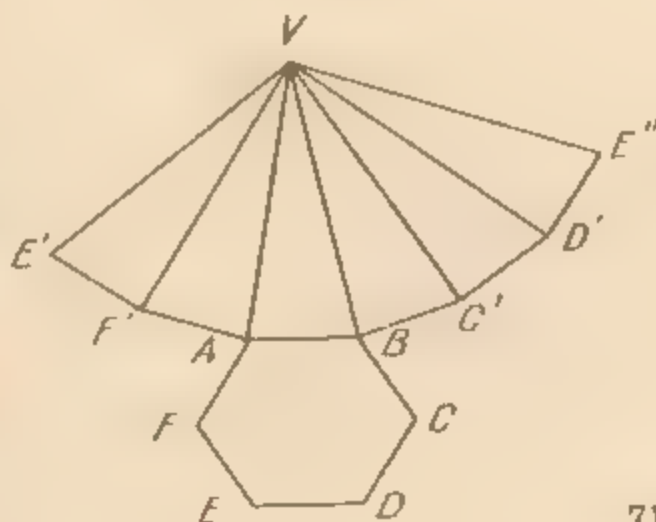
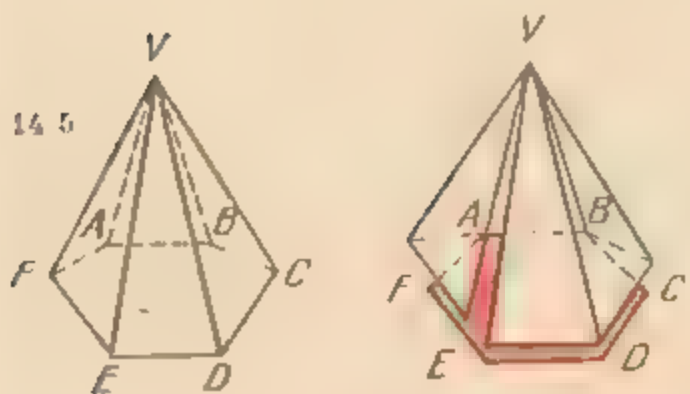


Fig. 14.5



## VOLUMUL PIRAMIDEI

Presupunem că s-au dus diagonalele bazei care pornesc dintr-un vîrf al ei. Planele determinate de aceste diagonale cu vîrfurile, luate ca plane de secțiune, împart piramida în tetraedre de aceeași înălțime (fig. 14.6). Suma volumelor

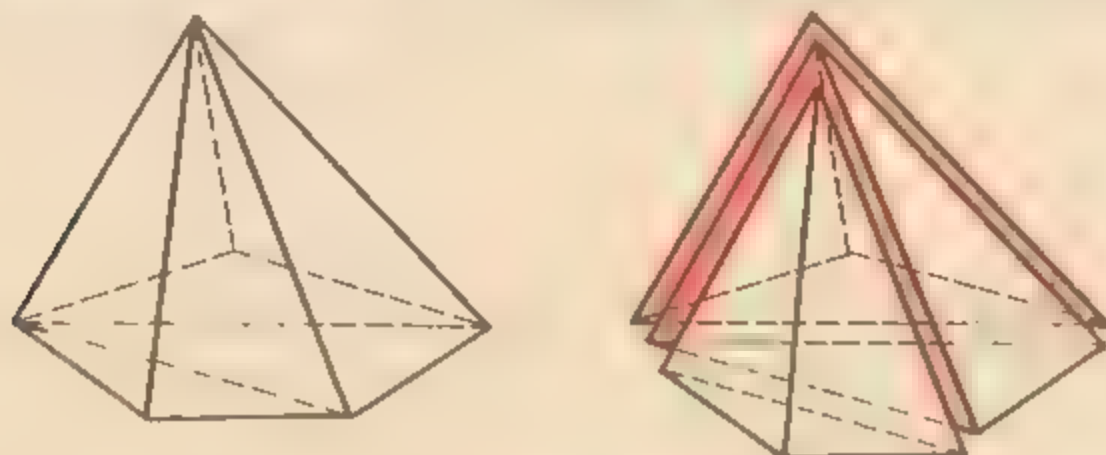


Fig. 14.6

lor o vom numi volumul piramidei. Volumul este independent de alegerea vîrfului bazei sau a unui punct din interiorul ei. Fie  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , ariile triunghiurilor în care a fost împărțit poligonul de bază și  $h$  înălțimea piramidei (care este comună tuturor tetraedrelor). Aria bazei este  $S = s_1 + s_2 + \dots + s_n$  și volumul 
$$= \frac{s_1 h}{3} + \frac{s_2 h}{3} + \dots + \frac{s_n h}{3} = (s_1 + s_2 + \dots + s_n) \cdot \frac{h}{3}$$

Deci,

*înălțime.*

*O problemă de desen.* Fie  $VABCD$  o piramidă patrulateră cu baza  $ABCD$ . Fie  $M, N$  și  $P$  puncte situate pe muchiile  $AB, VB$  și respectiv  $VD$ , astfel încît  $AM < \frac{AB}{2}$ ,  $VN > \frac{VB}{2}$  și  $VP > \frac{VD}{2}$ . Să se determine forma secțiunii piramidei  $VABCD$  cu planul determinat de punctele  $M, N$  și  $P$  (fig. 14.7).

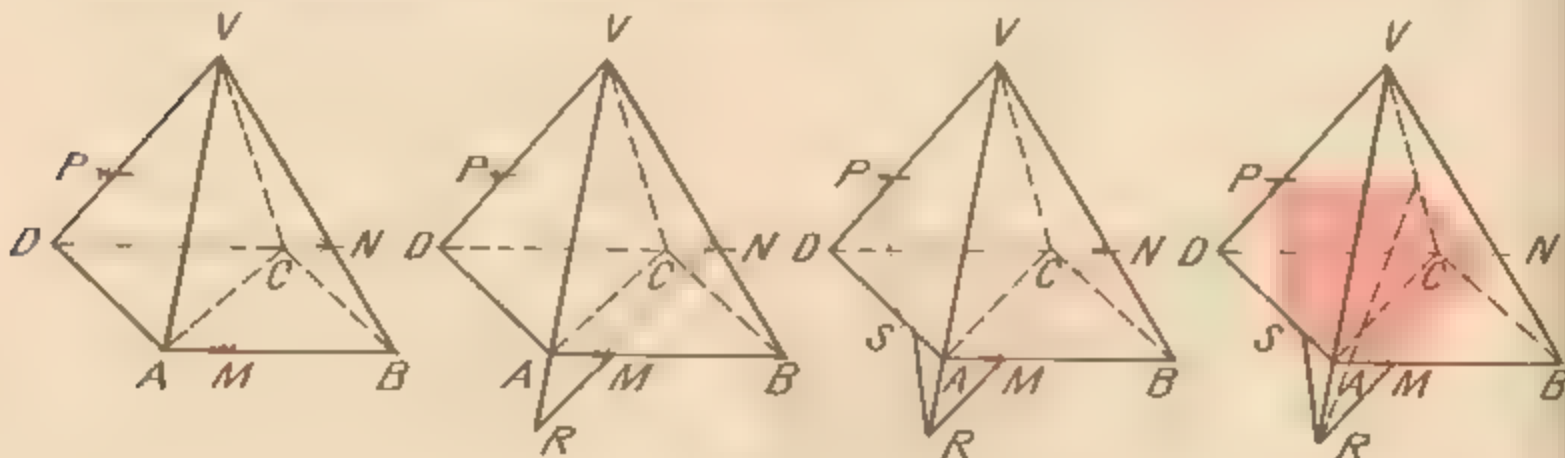
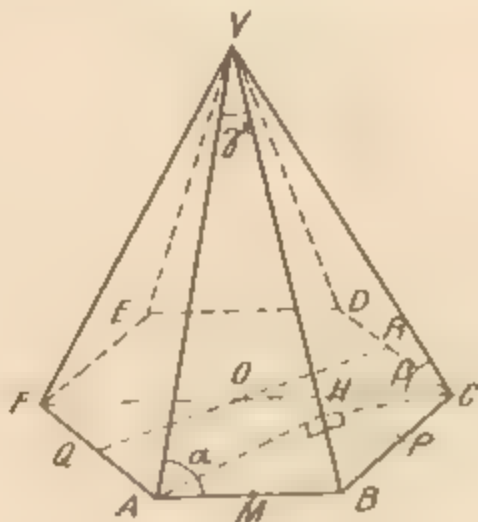


Fig. 14.7

*Rezolvare.* Cele patru desene din figura 14.7 rezolvă problema propusă. Cititorii vor face singuri comentariul în aceeași manieră cu cel de la problemele rezolvate privind secțiunile cu un plan, de la tetraedru și paralelipiped.

**Problemă rezolvată.** Se dă o piramidă hexagonală regulată  $VABCDEF$  cu elemente de lungimi cunoscute (fig. 14.8). Vom calcula câteva din elementele-unghiuri care apar.



**Fig. 14.8**

1. Unghiul  $\alpha$  dintre  $AB$  și  $VA$ . În triunghiul isoscel  $VAB$ , fie  $M$  mijlocul lui  $AB$ .  
 Avem  $\cos \alpha = \frac{AM}{VA}$ . Cum  $VA = \sqrt{h^2 + a^2}$ , rezultă  $\cos \alpha = \frac{a}{2\sqrt{h^2 + a^2}}$ .  
 Cum  $AB \parallel DE$  rezultă că  $\alpha = \angle(DE, VD) = \angle(AB, VD)$  și analog  $\alpha = \angle(AB, VE)$  și  $\alpha = \angle(AB, VB)$ .
2. Unghiul  $\beta$  dintre  $AB$  și  $VC$ . Avem  $AB \parallel CF$ , deci unghiul  $\beta$  se determină din triunghiul isoscel  $VCF$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{VO}{OC} = \frac{h}{a}.$$

Avem și  $\beta = \angle(AB, VF)$ .

3. Unghiul  $\gamma$  dintre  $VA$  și  $VB$  Din triunghiul  $VAB$  avem  $\gamma = 180^\circ - 2\alpha = 2(90^\circ - \alpha)$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{VA} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

5. *Unghiul  $\epsilon$  dintre  $VA$  și  $VD$*  Din triunghiul isoscel  $VAD$ , congruent cu triunghiul  $VCF$ , avem:

$$\epsilon = 180^\circ - 2\beta = 2(90^\circ - \beta).$$

6. Unghiul diedru  $\pi$  dintre planul bazei și planul unei fețe (VAF) este unghiul din Q al triunghiului VOQ, deci

$$\operatorname{tg} \pi = \frac{VO}{OQ} = \frac{h}{a\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3a}.$$



7. Unghiul diedru  $\sigma$  dintre planele fețelor  $VAB$  și  $VBC$ . Perpendicularele coborâte din  $A$  și  $C$  pe  $VB$  cad în același punct  $H$ ;  $AH = CH$ , deci, în triunghiul  $ACH$ , avem:

$$\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{\frac{AC}{2}}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2AH}; \quad AH \cdot VB = AB \cdot VM \text{ (dublul ariei triunghiului } VAB)$$

$$\text{deci } AH = \frac{AB \cdot VM}{VB} = \frac{a\sqrt{4h^2 + 3a^2}}{2\sqrt{h^2 + a^2}} \text{ etc.}$$

8. Unghiul diedru  $\omega$  dintre planele fețelor  $VCD$  și  $VAE$ . Avem  $CD \perp AF$ , deci  $AF \perp (VCD)$ , deci planele fețelor  $VCD$  și  $VAE$  se intersectează după o paralelă la  $CD$  și  $AF$ , ce trece prin  $V$ .

$$\text{Avem } VR \perp CD, \quad VQ \perp AF, \text{ deci } \omega = \widehat{R\hat{V}Q}, \quad \lg \frac{\omega}{2} = \frac{RQ}{VO} = \frac{a\sqrt{3}}{2h}.$$

## PROBLEME 14

1. Să se determine aria laterală a unei piramide triunghiulare regulate a cărei înălțime este de 4 cm, iar apotema piramidei este de 8 cm.

2. Aria laterală a unei piramide patrulateră regulate este de 14,76 m<sup>2</sup>, iar cea totală de 18 m<sup>2</sup>. Să se determine latura bazei și înălțimea piramidei.

3. Muchia laterală a unei piramide triunghiulare regulate formează cu planul bazei un unghi de 45°, iar latura bazei este egală cu  $a$ . Să se determine aria laterală a piramidei.

4. Într-o piramidă patrulateră regulată apotema bazei este de 24 cm, iar apotema piramidei este de 32 cm. Să se calculeze muchia laterală a piramidei, înălțimea și aria ei laterală.

5. Într-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc latura bazei  $l_3 = 5\sqrt{3}$  m și înălțimea piramidei  $h = 6$  m. Să se calculeze muchia laterală, apotema piramidei și aria ei totală.

6. Într-o piramidă hexagonală regulată se dă raza cercului circumscris bazei  $R = 12$  m și muchia laterală  $m = 13$  cm. Să se calculeze aria laterală, aria totală și înălțimea piramidei.

7. În piramida  $VABCD$ , baza  $ABCD$  este un pătrat cu latura  $a$ , iar fețele laterale  $VAB$ ,  $VBC$ ,  $VDC$  și  $VAD$  sunt triunghiuri echilaterale. Să se determine (în funcție de  $a$ ).

a) funcțiile trigonometrice ale unghiului dintre fețele  $VAD$  și  $VAB$ ;

b) funcțiile trigonometrice ale unghiului dintre fețele  $VAB$  și  $VDC$ ;

c) unghiul dintre  $VA$  și planul  $(ABC)$ .

8. Se consideră piramida triunghiulară  $ABCD$  cu muchiile  $AB = BC = CD = DA$ ,  $AB = a$ . Fie  $M$  și  $N$  mijloacele muchiilor  $AC$  și  $BD$ . Să se arate că  $MN$  este perpendiculară pe  $AC$  și  $BD$ .

9. Se dă un tetraedru regulat de muchie  $a$ .

a) Să se determine înălțimea și apotema tetraedrului, precum și valoarea cosinusului unghiului dintre două fețe ale tetraedrului.

b) Să se determine distanțele unui punct oarecare de pe înălțimea tetraedrului la fețele laterale, în funcție de distanța  $x$  a acestuia la planul bazei.

c) Utilizând rezultatul obținut la punctul b), să se arate că suma distanțelor oricărui punct de pe înălțime la fețele tetraedrului este constantă.

10. Prin mijlocul înălțimii unei piramide triunghiulare regulate  $VABC$  se duce un plan paralel cu una din fețele laterale. Să se afle aria secțiunii formate, știind că aria unei fețe laterale este de  $72 \text{ cm}^2$ .

11. Baza unei piramide este un triunghi echilateral cu latura de  $8 \text{ cm}$ . Una dintre fețele laterale este, de asemenea, un triunghi echilateral, al cărui plan este perpendicular pe planul bazei. Să se determine aria laterală a acestei piramide.

12. O piramidă are ca bază trapezul dreptunghic  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ,  $AD = a$ ,  $BC = 2a$  și  $AB = 2a$ ). Înălțimea piramidei  $VO$  cade în punctul  $O$ , mijlocul segmentului  $AB$ . Știind că  $VO = a$ , să se calculeze:

- ariile triunghiurilor  $VAB$ ,  $VAD$ ,  $VBC$ ;
- volumul piramidei.

13. O piramidă are ca bază un paralelogram  $ABCD$  și vârful  $V$ , astfel încât muchia  $VD$  să fie perpendiculară pe planul bazei. Se notează cu  $M$  mijlocul muchiei  $VB$ ,  $B$  fiind vârful opus lui  $D$  în paralelogramul  $ABCD$ . Să se arate că:

- planele  $MAC$  și  $MBD$  sînt perpendiculare pe planul bazei și  $MB = MD$ ;
- unghiurile fețelor  $MAD$  și  $MBC$  cu planul bazei sînt congruente.

14. O piramidă patrulateră regulată are latura bazei egală cu  $a$ , iar secțiunea diagonală este echivalentă cu baza. Să se determine aria laterală a piramidei.

15. O piramidă are baza un paralelogram. Ce poligon se obține secționînd această piramidă cu un plan paralel cu o față laterală a sa?

16. Să se arate că oricum am alege trei muchii ale unei piramide, cel puțin două sînt situate în același plan.

17. Într-o piramidă patrulateră regulată  $VABCD$ , cu muchia bazei egală cu  $8 \text{ cm}$ , se duce, prin mijlocul muchiei  $VA$ , un plan paralel cu planul triunghiului  $VBD$ . Știind că muchiile piramidei sînt congruente cu diagonala bazei, să se calculeze:

- aria laterală și volumul piramidei;
- aria secțiunii determinată în piramidă.

18. Fie o piramidă patrulateră regulată cu baza un pătrat  $ABCD$  de latură  $1 \text{ cm}$ . Știind că unghiurile diedre a două fețe opuse sînt congruente cu unghiurile diedre pe care acestea le formează cu baza, să se determine:

- muchii laterale;
- înălțimea piramidei;
- aria laterală și aria totală.

19. O piramidă cu baza  $ABCD$  dreptunghi, are  $AB = 2a$ ,  $BC = a$  și înălțimea  $SD = 2a$ . Pe muchia  $SB$  se ia mijlocul ei,  $P$ .

- Să se arate că triunghiul  $APC$  este isoscel și să se calculeze aria sa.
- Să se calculeze aria laterală a piramidei.

20. Fie  $SABCD$  o piramidă regulată cu baza pătratul  $ABCD$  de latură  $3\sqrt{2}$  și muchie laterală  $5$ .

- Să se afle aria laterală și volumul piramidei.
- Dacă notăm cu  $O$  centrul pătratului și considerăm un punct  $M$  pe muchia  $SB$ , să se determine cosinusul unghiului format de  $OM$  cu planul pătratului, astfel încît aria triunghiului  $ACM$  să fie minimă.

21\*. Dacă o piramidă triunghiulară regulată are muchia laterală de mărime  $a$  constantă și latura  $x$  a bazei variabilă (dar baza este mereu un triunghi echilateral de latură  $x$ ), să se găsească mărimea lui  $x$  pentru care volumul piramidei este maxim.

22. Într-o piramidă de înălțime  $h$ , să se spună la ce distanță de vîrf trebuie dus un plan paralel cu baza, astfel încît aria totală a piramidei mici obținute, să fie de două ori mai mică decît a celei inițiale.

23. O piramidă are muchiile laterale congruente și ele formează cu planul bazei unghiuri de  $45^\circ$ . Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de cîte  $60^\circ$  și bazele de 6 cm și 8 cm. Să se calculeze:

- raza cercului circumscris trapezului isoscel;
- volumul piramidei.

24. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de  $6\sqrt{3}$  m și apotema (piramidei) de 5 m. Să se afle volumul piramidei.

25. Dreptunghiul  $ABCD$  este baza unui paralelipiped dreptunghic  $ABCDEFGH$ , în care  $AB \equiv AE$ ,  $AB = 2a$  și  $AD = a\sqrt{3}$ . Fie  $P$  mijlocul laturii  $AB$  și  $Q$  mijlocul laturii  $AE$ . Să se calculeze volumul tetraedrului  $FHPQ$  în funcție de  $a$ .

26. Printr-una din laturile bazei unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea  $h = 4\sqrt{3}$  cm și latura bazei 5 cm, se duce planul perpendicular pe muchia opusă. Să se calculeze aria secțiunii obținute.

27. Fețele unei piramide triunghiulare regulate sînt triunghiuri isoscele de bază 4 și unghi la vîrf  $30^\circ$ . Să se exprime volumul piramidei, cu ajutorul unor funcții trigonometrice ale unghiului de  $15^\circ$ .

28. Fie  $OABC$  o piramidă triunghiulară cu muchiile  $OA, OB, OC$  perpendiculare, două cîte două, și  $OA = 30$  cm,  $OB = 40$  cm,  $OC = 70$  cm. Să se afle distanța de la vîrf  $O$  la planul  $ABC$ .

29. Fie  $SABC$  un tetraedru regulat și  $M$  mijlocul muchiei  $SC$ .

- Să se demonstreze că dreapta  $SC$  este perpendiculară pe planul  $MAB$ .
- Să se afle raportul dintre volumele piramidelor  $SABM$  și  $MABC$ .
- Să se arate că ariile totale ale acestor piramide sînt egale.
- Ce poziție trebuie să aibă punctul  $M$  pe  $SC$ , pentru ca aria triunghiului  $ABM$  să fie minimă.

30\*. Secționînd partea superioară a unui acoperiș, se obține un corp ca în figura 14.9 cu dimensiunile de acolo (bazele sînt dreptunghiuri, iar fețele laterale trapeze isoscele). Prolungînd  $AA', DD'$  și  $BB', CC'$ , pînă se întîlnesc, să se găsească volumul acoperișului din care provine această secțiune.

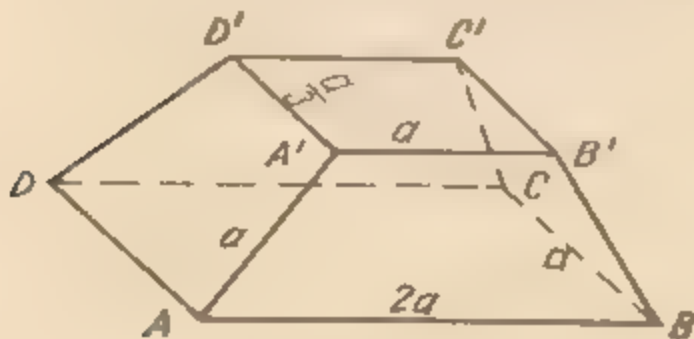


Fig. 14.9

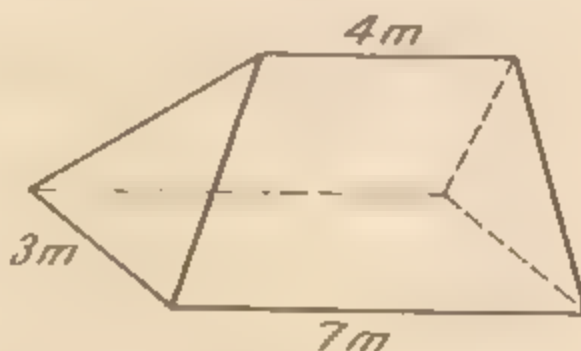


Fig. 14.10

31\*. În figura 14.10 este reprezentat un cort, cu baza un dreptunghi, două fețe triunghiuri echilaterale și două fețe trapeze isoscele. Să se determine volumul cortului.

32. Pe un cub  $ABCD A' B' C' D'$  cu muchia  $DC = a$  se așază o piramidă regulată  $VABCD$ , cu toate fețele triunghiuri echilaterale (figura 14.11)

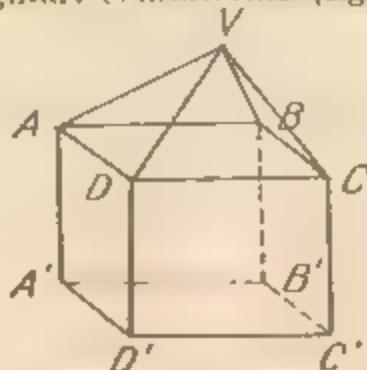


Fig. 14.11

a) Să se determine volumul corpului obținut.

b) Să se arate că  $AV \perp VC$ .

c) Dacă nu se cunoaște latura  $a$  ci numai lungimea segmentului  $VA' = 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$  metri, să se găsească lungimea laturii  $a$ .

33. Se dă o prismă triunghiulară  $ABCA' B' C'$  de volum  $8 \text{ m}^3$ . Fie  $M$  mijlocul muchiei laterale  $BB'$ . Să se afle volumul piramidei  $MACC'A'$ .

34. O piramidă regulată  $VABCD$  are latura bazei  $AB = 4 \text{ cm}$  și apotema piramidei egală cu  $2,5 \text{ cm}$ . Fie  $A', B', C', D'$  mijloacele muchiilor laterale  $VA, VB, VC, VD$  (în această ordine) și fie  $N$  un punct oarecare în planul bazei. Să se afle volumul piramidei  $NA' B' C' D'$ .

35. Într-o cutie cubică cu capacul  $ABCD$  și muchia  $AB = 2 \text{ dm}$ , punem o piramidă regulată  $VA' B' C' D'$  unde  $A' B' C' D'$  este cealaltă bază a cubului. Dar capacul  $ABCD$  nu se mai include. El face un unghi de  $45^\circ$  cu planul bazei.

a) Care este volumul piramidei?

b) Să se găsească sinusul unghiului plan al diedrului format de o față laterală a piramidei cu baza acesteia.

36. Dacă desfășurăm suprafața laterală a unei piramide triunghiulare regulate, obținem figura 14.12. Știind că latura bazei este  $BC = 10 \text{ dm}$ , să se afle aria și volumul piramidei ( $VA, VA'$  sînt în prelungire).

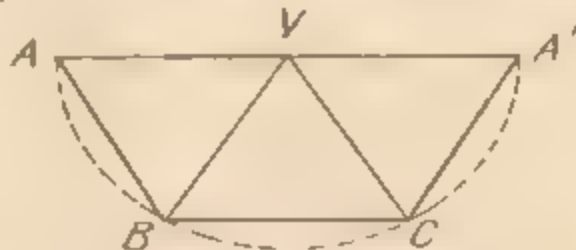


Fig. 14.12

37. Se dă o piramidă patrulateră regulată cu vârful  $V$  și baza  $ABCD$  ( $VA \equiv VB \equiv VC \equiv DV, VA = a$ ) și unghiurile de la vîrf ale fețelor laterale de  $30^\circ$ . O furnică pornește din vârful  $A$  și merge pe toate fețele laterale, în linie dreaptă, pînă revine în punctul  $A$ . Se notează cu  $B', C', D'$  punctele unde furnica traversează respectiv muchiile  $VB, VC$  și  $VD$ . Se cere:

a) să se desfășoare pe un plan suprafața laterală a piramidei și să se traseze pe ea drumul furnicii;

b) cînd este drumul acesta cel mai scurt și în acest caz să se calculeze lungimea lui;

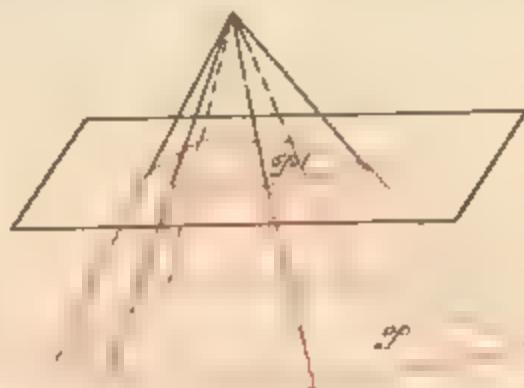
c) unghiurile sub care drumul furnicii taie muchiile laterale.

38. Să se arate că perpendicularele pe fețele unui tetraedru, în centrele cercurilor circumscrise acestor fețe, sînt concurente.

## Trunchi de piramidă

Corpul ce rezultă îndepărtînd dintr-o piramidă o piramidă mai mică, obținută secționînd piramida inițială cu un plan paralel cu baza ei, se numește *trunchi de piramidă*.

Fig. 15.1



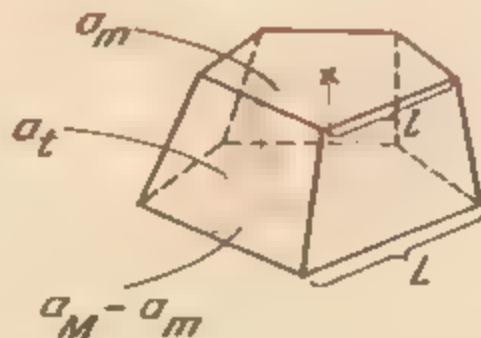
Cu notațiile din figura 15.1:

- Poligonul  $A$ , se numește *baza mare*.
- Poligonul din planul de secțiune  $a$ , se numește *baza mică*.
- Toate trapezele ce rămîn din fețele laterale, în urma secționării și îndepărtării piramidei mai mici, se numesc *fețe laterale*.

Este ușor de arătat că cele două baze sînt poligoane asemenea. Lăsăm această demonstrație pe seama cititorului.

Dacă trunchiul de piramidă provine dintr-o piramidă regulată, el se numește *trunchi de piramidă regulată*. Fețele sale laterale sînt trapeze isoscele congruente. Vom numi înălțimea unei astfel de fețe, *apotema trunchiului de piramidă regulată*. Deci, la un trunchi de piramidă regulată, avem trei feluri de apoteme: *apotema bazei mari*, *apotema bazei mici*, și *apotema trunchiului*.

Fig. 15.2



Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată este suma ariilor tuturor fețelor laterale. Notînd cu  $n$  numărul laturilor unei baze, cu  $a_t$  apotema trunchiului, cu  $l$  lungimea laturii bazei mici și cu  $L$  cea a bazei mari,  $A_t$ , fiind aria laterală, se obține, printr-un procedeu asemănător cu cel de la piramidă, că:

$$A_t = n \cdot \frac{(L + l) \cdot a_t}{2}$$



Aria totală a trunchiului de piramidă se obține adunând la aria sa laterală suma ariilor celor două baze. Dacă notăm cu  $\mathcal{A}_t$  aria totală, cu  $a_M$  apotema bazei mari și cu  $a_m$  pe cea a bazei mici:

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \frac{L \cdot a_M + l \cdot a_m}{2} \cdot \pi$$

Desfășurarea trunchiului de piramidă se face asemănător cu cea a unei prisme (fig. 15.3):

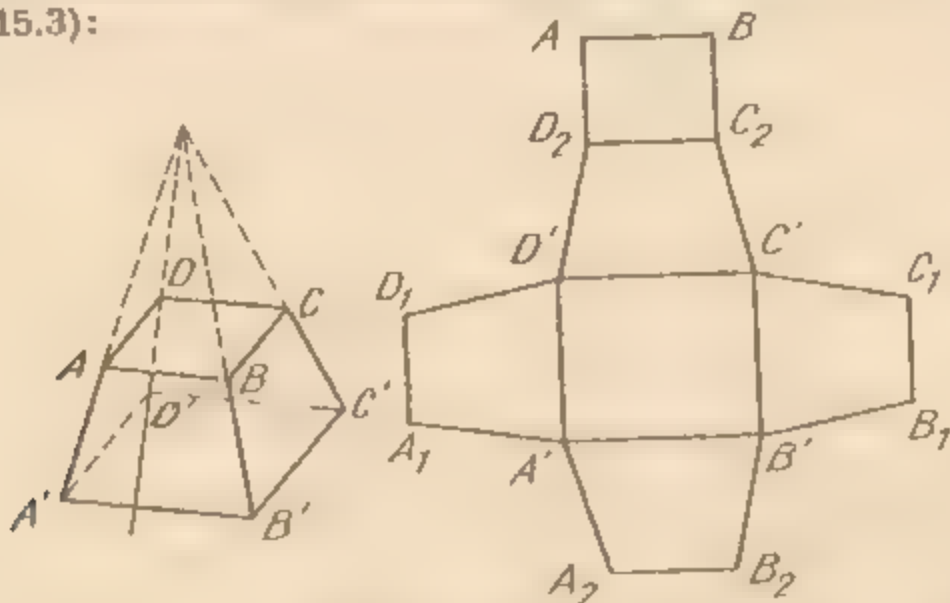


Fig. 15.3

Distanța dintre planele bazelor trunchiului de piramidă o numim înălțime. Luată astfel, ea este număr. În unele probleme o vom considera și ca un segment cu capetele respective în planele bazelor și perpendicular pe aceste baze.

#### Calculul înălțimii trunchiului de piramidă regulată

Notăm cu  $L$  și  $l$  laturile bazelor, cu  $a_M$  și  $a_m$  apotemele respective ale bazelor, cu  $a_t$  apotema trunchiului, cu  $m$  muchie lui laterală, cu  $R_M$  și  $R_m$  razele cercurilor circumscrise bazelor și cu  $h$  înălțimea trunchiului de piramidă.

- Să se exprime, în funcție de  $a_M$ ,  $a_m$  și  $a_t$ , înălțimea  $h$  (fig. 15.4).
- Să se exprime, în funcție de  $R_M$ ,  $R_m$  și  $m$ , înălțimea  $h$  (fig. 15.5)

$$h^2 = a_t^2 - (a_M - a_m)^2$$

$$h^2 = m^2 - (R_M - R_m)^2$$

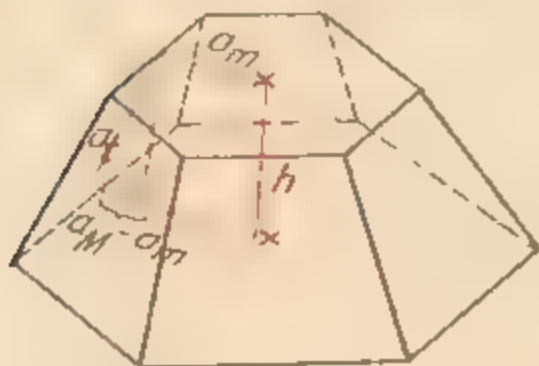


Fig. 15.4

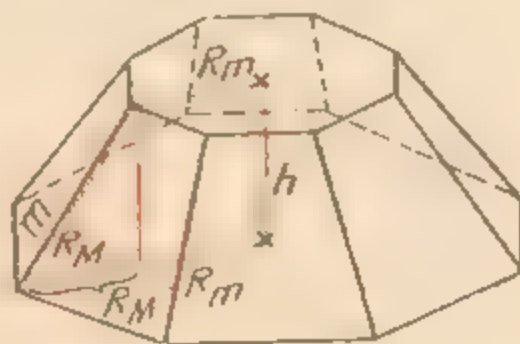


Fig. 15.5

În general, un plan paralel cu baza  $ABC \dots MN$  a unei piramide determină încă o piramidă cu baza  $A'B'C' \dots M'N'$  și cu același vîrf  $P$ , pe care o vom numi „asemenea” cu piramida mare, pentru că toate fețele de tipul  $PAB$  sînt asemenea cu cele de tipul  $PA'B'$ , bazele  $ABC \dots MN$  și  $A'B'C' \dots M'N'$  sînt și ele asemenea și raportul lor de asemănare (raportul a două segmente omoloage), prin tranzitivitate, se poate dovedi că este același.

Dacă, în plan, raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare (fapt valabil și pentru ariile laterale și totale ale celor două piramide), vom putea afirma următoarea:

**Teoremă.**

*raportului de asemănare*

*Demonstrație.* Dacă notăm raportul de asemănare cu  $n$ , avem:

$$\frac{S_{ABC \dots MN}}{S_{A'B'C' \dots M'N'}} = n^2 \text{ și } \frac{h}{h'} = n,$$

unde  $h$  este înălțimea piramidei inițiale și  $h'$  a celei mici, iar

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{S_{ABC \dots MN} \cdot h}{S_{A'B'C' \dots M'N'} \cdot h'} = n^2 \cdot n = h^3.$$

*mult calculul e bunos în deziule ocarii*

## VOLUMUL TRUNCHIULUI DE PIRAMIDĂ

**Teoremă.**

*den produsul ariilor celor două baze*

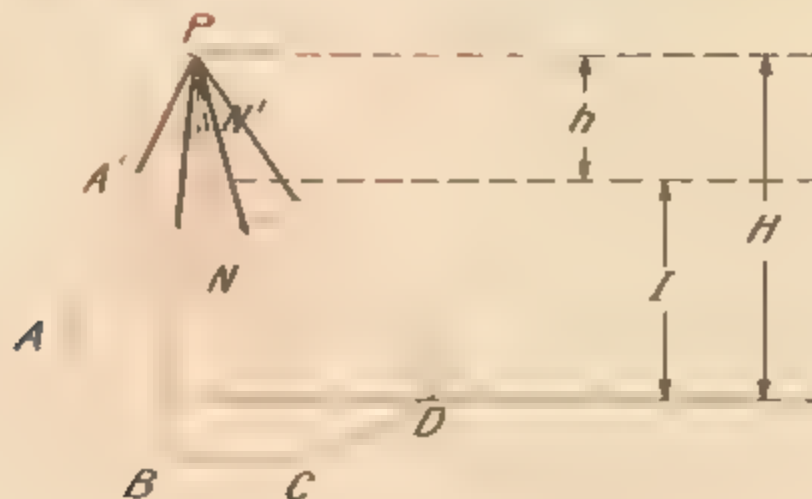


Fig. 15.6

Avem deci de arătat că

$V = \frac{1}{3} S H$ , unde  $V$  este volumul

trunchiului,  $H$  este înălțimea trunchiului de piramidă,  $S$  aria bazei mari și  $s$  aria bazei mici.  $H$  și  $h$  sînt mărimi ajutătoare, și anume, înălțimile piramidelor așa cum se formează ele în desen, prin prelungirea muchiilor, iar  $V_1$  și  $v_1$  volumele piramidelor respective (fig. 15.6).

Știm că  $\frac{V_1}{v_1} = \frac{H^3}{h^3}$  și, dintr-o proporție derivată, obținem:

$$\frac{V_1 - v_1}{v_1} = \frac{H^3 - h^3}{h^3}.$$

Deci,

$$V = \frac{v_1 (H^3 - h^3)}{h^3} = \frac{v_1}{h^3} (H^3 - h^3) = \frac{v_1}{h} \left( \frac{H^3}{h^2} + \frac{H}{h} + 1 \right).$$

Dar  $\frac{H}{h} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}}$ . Rezultă:

$$V = \frac{shI}{3h} \left( \frac{S}{s} + \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{s}} + 1 \right) = \frac{I}{3} (S + \sqrt{Ss} + s),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

## PROBLEME 15

1. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de  $6\sqrt{3}$  m, latura bazei mici de  $2\sqrt{3}$  m și muchia laterală de 5 m. Să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului.

2. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari  $L$ , latura bazei mici  $l$  și înălțimea  $h$ . Să se calculeze, în funcție de  $L$ ,  $l$  și  $h$ , înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

3. O piramidă are aria bazei de  $8 \text{ cm}^2$  și înălțimea de 10 cm. Se secționează cu un plan paralel cu baza dus prin mijlocul înălțimii. Se cere volumul trunchiului de piramidă.

4. Într-un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc (notațiile fiind cele din figura 15.7): înălțimea  $A'P = 3$  cm, distanța  $B'E' = 8$  cm și latura bazei mari  $DE = 8$  cm.

a) Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă.

b) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de piramidă.

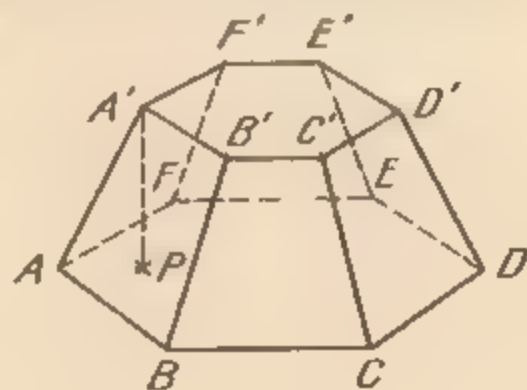


Fig. 15.7

5. Se dă o piramidă regulată  $VABCD$ , avînd baza un pătrat  $ABCD$  și lungimea înălțimii egală cu 8 cm. La ce distanță de planul bazei trebuie dat un plan paralel cu planul bazei, astfel încît raportul dintre volumul trunchiului de piramidă obținut și volumul piramidei  $VABCD$  să fie egal cu  $\frac{7}{8}$ ?

6. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată se cunosc: latura bazei mari  $l = 12$  cm, latura bazei mici  $l = 0,6$  dm și volumul  $V = 63\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. Să se afle înălțimea, apotema, muchia și aria laterală a trunchiului.

7. Într-un trunchi de piramidă triunghiulară regulată se cunosc: latura bazei mari  $L = 10$  m, raza cercului circumscris bazei mici  $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  m și aria laterală  $S_l = 168$  m<sup>2</sup>. Să se afle volumul și muchia laterală a trunchiului de piramidă.

8. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are diagonala de 9 m și laturile bazelor de 7 m și 5 m. Se cere aria laterală și volumul său.

9. Un trunchi de piramidă are ca baze două romburi cu laturile de 6 cm și 8 cm și cu câte un unghi de  $120^\circ$ . Înălțimea trunchiului este egală cu triplul diagonalei mari a bazei mari și unește centrele romburilor. Să se calculeze înălțimea piramidei din care provine trunchiul.

10. O piramidă are muchiile laterale congruente și ele formează cu planul bazei unghiuri de  $45^\circ$ . Baza este un trapez isoscel cu unghiurile ascuțite de câte  $60^\circ$  și bazele de 6 cm și 8 cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu baza și care împarte înălțimea în două părți egale. Să se afle volumul trunchiului de piramidă obținut.

11. O piramidă regulată are înălțimea de 12 cm. La ce distanță de vîrf trebuie să se facă o secțiune, printr-un plan paralel cu baza, astfel încît aria laterală a piramidei mici, ce se formează, să fie egală cu aria laterală a trunchiului de piramidă regulată.

12. Un trunchi de piramidă regulată are ca baze două triunghiuri echilaterale cu laturile  $a$  și respectiv  $2a$ . Apotema trunchiului este egală cu  $4a$ . Să se calculeze, în funcție de  $a$ , aria totală și volumul trunchiului de piramidă.

13. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de  $a$  metri, latura bazei mici de  $b$  metri și unghiul format de muchia laterală cu muchia bazei mari, care pornesc din același vîrf, egal cu  $60^\circ$ . Să se calculeze volumul trunchiului de piramidă.

14\*. Un trunchi de piramidă are ariile bazelor egale cu  $S_1$  și  $S_2$ . Se face o secțiune printr-un plan paralel cu bazele, la aceeași distanță față de ambele baze. Să se calculeze aria  $S$  a acestei secțiuni în funcție de  $S_1$  și  $S_2$ .

15. Un trunchi de piramidă are ariile bazelor  $S$  și  $s$  și înălțimea  $l$ . Să se calculeze, în funcție de  $S$ ,  $s$  și  $l$ , volumul piramidei din care face parte trunchiul.

## POLIEDRE CONVEXE ÎN GENERAL

Am studiat pînă acum cîteva poliedre particulare: prisma, piramida și trunchiul de piramidă. Trunchiul de piramidă a fost obținut prin intersecția unei piramide cu un plan și „îndepărtarea” unei părți din piramida inițială. De asemenea, în toate problemele de secțiune cu un plan a poliedrelor parti-

culare obținute pînă acum, acest plan a determinat, de o parte și de alta a sa, două corpuri care nu sînt neapărat ambele prisme, sau piramide, sau trunchiuri de piramidă (fig. 16.1).

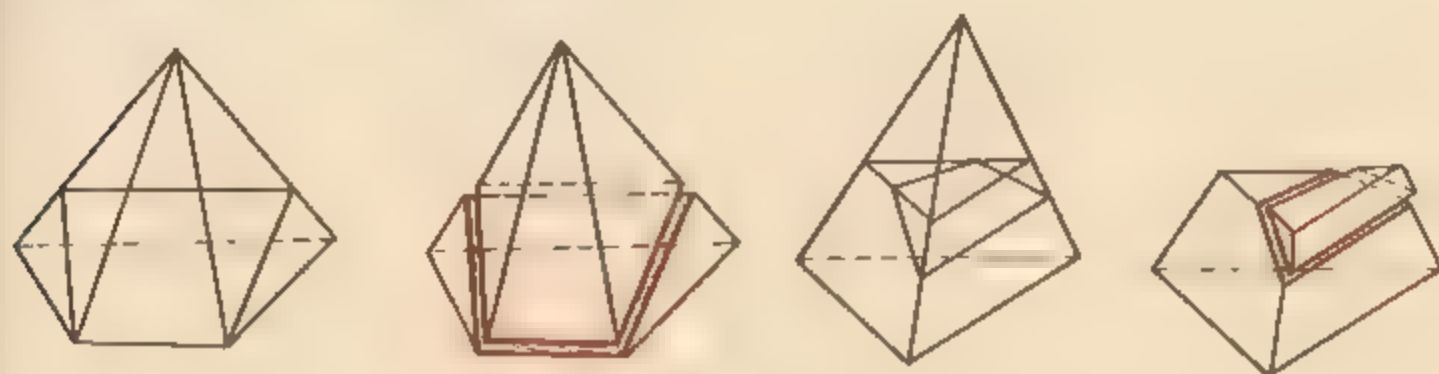


Fig. 16.1

Corpurile obținute, printr-o astfel de secționare, pot fi și ele secționate mai departe și apoi separate cele două părți etc. Aceste operații (una sau mai multe succesiv), aceste „ciopliri”, ca să le numim așa, dau la niște corpuri pe care le vom numi poliedre convexe (fig. 16.2).



Fig. 16.2

Ele au un număr finit de fețe, care sînt poligoane convexe, iar laturile acestora se numesc muchii. O muchie (fără capete) este comună pentru două și numai pentru două fețe. Virfurile fețelor sînt virfurile poliedrului. Dintr-un vîrf pornesc tot atîtea muchii cîte fețe. Din orice vîrf al poliedrului convex, la un vîrf se poate ajunge pe un traseu format numai din muchii.

Acestea sînt numai o parte din proprietățile poliedrelor convexe.



# TRANSFORMĂRI ÎN SPAȚIU

## SIMETRIA FAȚĂ DE UN PUNCT

mentului  $AA'$ .

În fond, definiția este asemănătoare cu cea din plan.



### Teoremă.

Cu alte cuvinte, dacă avem două puncte  $A$  și  $B$  și considerăm simetriile lor față de  $O$ ,  $A'$  și respectiv  $B'$ , putem scrie congruența segmentelor  $AB \equiv A'B'$  (fig. 17.1).

Evident, segmentele  $AA'$ ,  $BB'$  sînt coplanare (au  $O$  comun). Triunghiurile  $AOB$  și  $A'OB'$  sînt congruente (cazul I de congruență), de unde rezultă că  $AB \equiv A'B'$ . Deci simetria față de un punct este o izometrie.

**Consecințe.** Prin această transformare:

1)

(segmentului simetric). Fie  $C$  un punct interior segmentului  $AB$ . Deci,  $AC + CB = AB$ . Fie  $C'$  simetricul lui  $C$ . Dacă  $C'$  nu ar fi interior lui  $A'B'$ , atunci  $A'C' + C'B' > A'B'$ . Dar cum  $AC \equiv A'C'$  și  $CB \equiv C'B'$ , ar rezulta că  $AB > A'B'$  și s-ar contrazice teorema anterioară. Deci  $C'$  este interior segmentului  $A'B'$ .

2)

păstrează congruența laturilor.

Evident, se

3)

Se iau oricare trei puncte pe o dreaptă  $d$ :  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Sigur unul din ele se află între celelalte două, de exemplu  $B$  între  $A$  și  $C$ . Atunci  $AB + BC = AC$  și distanțele rămîn aceleași, procedînd prin reducere la absurd s-ar ajunge la  $A'C' < AC$ , fals...

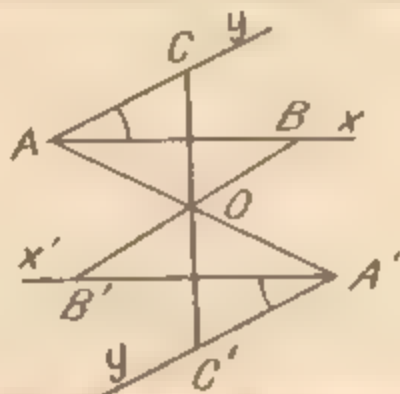
4)

Evident, simetricul virfului este virful simetricului (Aparținind ambelor drepte-suport.) Luăm (cu notațiile din figura 17.2)  $B \in Ax$ ,  $C \in Ay \Rightarrow B' \in A'x'$ ,  $C' \in A'y'$ , deci  $AC \equiv A'C'$ ,  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C' \Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ .

5)

se demonstrează ușor, ca o urmare a faptului că o dreaptă se transformă într-o dreaptă.

Fig. 17.2



Observație.

## SIMETRIA FAȚĂ DE O DREAPTĂ

Cu alte cuvinte, ducând din  $P$  perpendiculara  $PO$  pe  $a$  ( $O \in a$ ) și prelungind-o cu segmentul  $OP' \equiv OP$ , punctul  $P'$  se numește simetricul lui  $P$ . Să arătăm că simetria față de o axă este o izometrie (păstrează distanța).

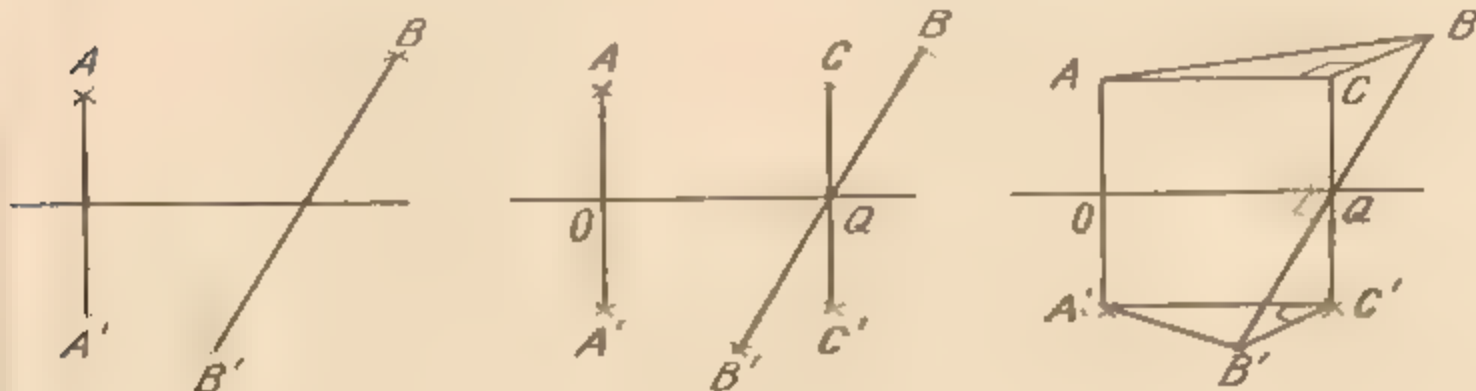


Fig. 17.3

Fie în spațiu  $A, A'$  simetrice față de  $a$  și  $B, B'$  simetrice față de  $a$  (fig. 17.3). Prin  $Q$ , mijlocul segmentului  $BB'$ , ducem segmentul  $CC'$ , congruent și paralel cu  $AA'$ , astfel încât  $CC'$  să aibă mijlocul tot în  $Q$ . Planul determinat de  $CC'$ , și  $BB'$  este perpendicular pe  $a$ . În acest plan,  $\triangle CBQ \cong \triangle C'B'Q$ . Dar și  $AC \cong A'C'$ , ca laturi opuse ale unui dreptunghi. Știind că  $AC \parallel A'C' \parallel OQ$ , deci  $AC$  și  $A'C'$  sînt perpendiculare pe planul  $(BB'C)$ , deci  $AC \perp CB$ ,  $A'C' \perp C'B'$ . Rezultă congruența triunghiurilor dreptunghice  $ACB$  și  $A'C'B' \Rightarrow AB \cong A'B'$ . Deci,

și

Deci

## SIMETRIA FAȚĂ DE UN PLAN

Simetricul unui punct ( $A$ ) față de un plan ( $\alpha$ ) este simetricul punctului față de proiecția sa pe plan. Cu alte cuvinte, dacă ducem  $AO \perp \alpha$  și prelungim segmentul  $AO$  cu  $OA' = AO$  (fig. 17.4), obținem simetricul  $A'$  al lui  $A$ .

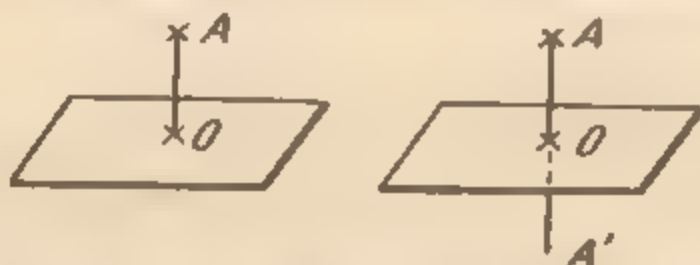


Fig. 17.4

Să arătăm că această simetrie păstrează și ea distanța dintre două puncte. Fie  $A'$  simetricul lui  $A$  și  $B'$  simetricul lui  $B$  față de planul  $\alpha$  (fig. 17.5).  $OA = OA'$ ,  $BC = CB'$ ,  $AO \perp \alpha$ ,  $BC \perp \alpha$ . Evident,  $AA' \parallel BB'$  (perpendiculare pe același plan), deci  $AA'$  și  $BB'$  sînt coplanare.

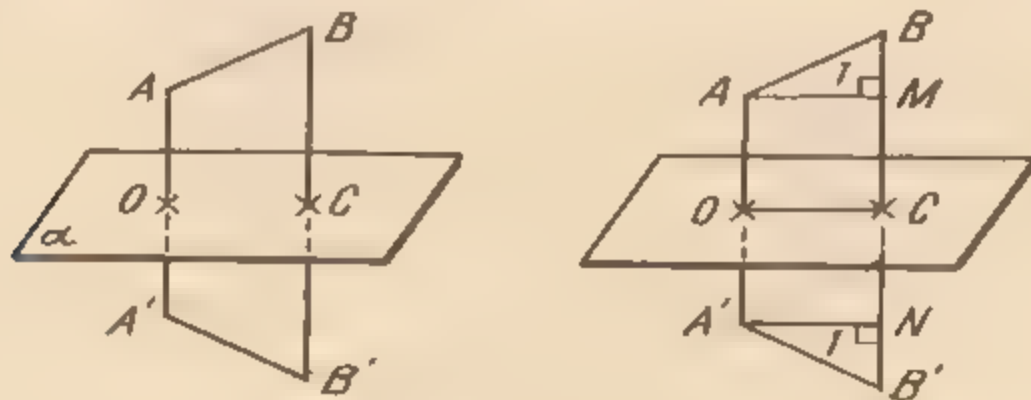


Fig. 17.5

Ducem  $AM \parallel OC \parallel A'N$  ( $M \in BC$ ,  $N \in CB'$ ). Rezultă oă  $\sphericalangle M_1 = \sphericalangle N_1$ ,  $\sphericalangle M_1 = 90^\circ$ ,  $AM = A'N$  (paralele cuprinse între paralele),  $BM = NB'$  (diferențe de segmente congruente). Deci  $\triangle AMB \cong \triangle A'NB' \Rightarrow AB \cong A'B'$ . Consecințele 1 ... 5 operează deci.

## TRANSLAȚIE ÎN SPAȚIU

Fie  $AB$  un segment în spațiu, cu vîrfurile în ordinea scrisă (un vector). Să explicăm ce înseamnă să translatăm un punct  $M$  în spațiu cu vectorul  $\overrightarrow{AB}$  (fig. 17.6). Considerăm pentru aceasta planul  $\alpha$  determinat de  $A, B, M$ .

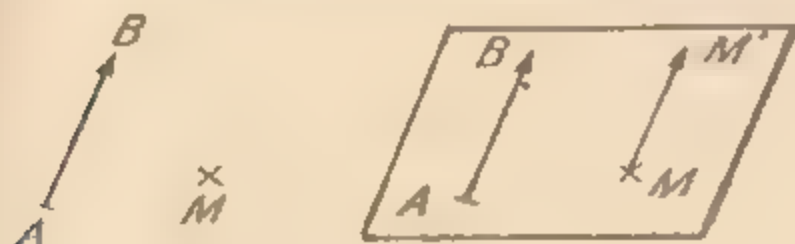


Fig. 17.6

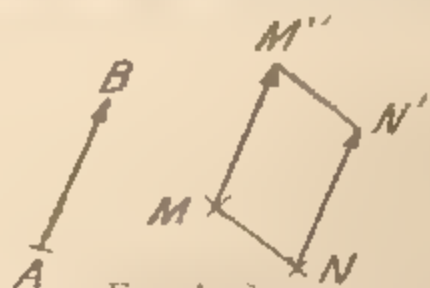


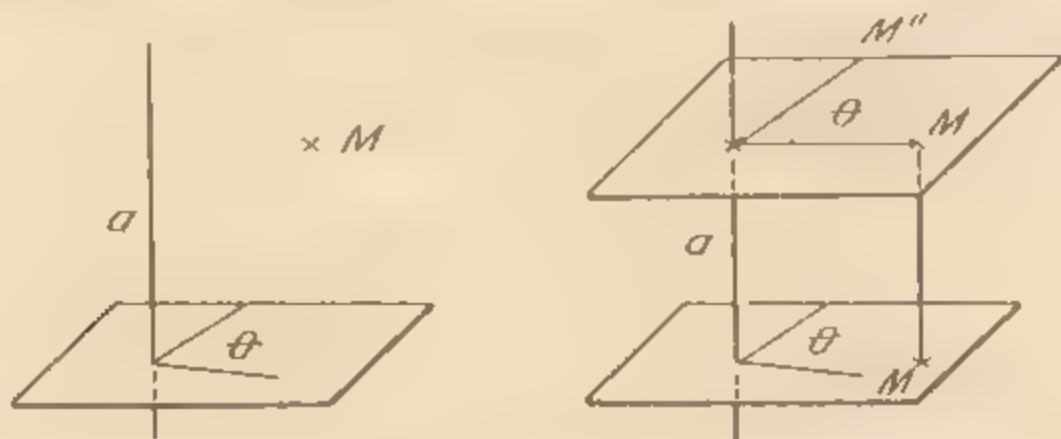
Fig. 17.7

În acest plan considerăm vectorul  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ . Spunem că  $M'$  este obținut printr-o translație în spațiu a punctului  $M$  cu vectorul  $\overrightarrow{AB}$ . Este oare translația în spațiu și ea o izometrie? Să translatăm cu vectorul  $\overrightarrow{AB}$  punctele  $M$  și  $N$  în  $M'$  și  $N'$  (fig. 17.7). Constatăm că patrulaterul  $MNN'M'$  este un paralelogram ( $MM' = NN'$ ,  $MM' \parallel NN'$ , prin tranzitivitatea congruenței și paralelismului cu  $\overrightarrow{AB}$ ). Rezultă, de aici, congruența segmentelor  $NM = N'M'$ .

## ROTAȚIE ÎN JURUL UNEI AXE

Se dau: o axă  $a$  și, într-un plan perpendicular pe ea, un unghi orientat  $\sphericalangle \theta$ , cu vîrfurile pe axă (fig. 17.8). Ce înseamnă a roti punctul  $M$  din spațiu, cu unghiul  $\sphericalangle \theta$ , în jurul axei  $a$ ?

Fig. 17.8



Ducem  $MM' \perp \alpha$ , ( $M' \in \alpha$ ). Considerăm translația de vector  $\overrightarrow{M'M}$  a planului  $\alpha$ . Planul translatat trece prin  $M$ , iar  $O$  devine, prin translație,  $O' \in a$ . Aplicăm lui  $M$  o rotație de unghi  $\sphericalangle \theta$ , în planul translatat, și  $M''$  va fi „rotitul” lui  $M$  în jurul axei  $a$  cu unghiul  $\sphericalangle \theta$ .

Să demonstrăm că rotația în jurul unei axe este o izometrie. Dacă, prin rotația de axă  $\alpha$  și de unghi  $\angle \theta$ , se duce  $A$  în  $A'$ , aceasta se scrie  $A' \rightarrow R_{(\alpha, \theta)}(A)$ .

Să demonstrăm că dacă  $R_{(\alpha, \theta)}A \rightarrow A'$  și  $R_{(\alpha, \theta)}B \rightarrow B'$ , atunci  $AB \equiv A'B'$ . Proiectăm pe planul  $\alpha$ , pe  $O'B$  în  $OC$  și pe  $O'B'$  în  $OC'$  (vezi notațiile din

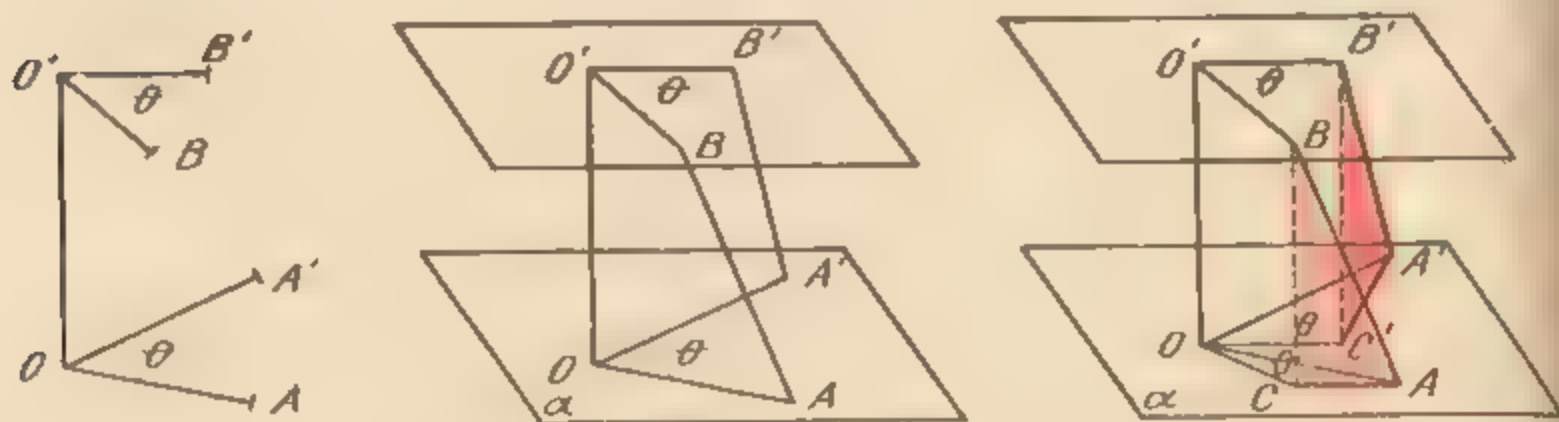


Fig. 17.9

figura 17.9). Rezultă:  $\triangle OCA \equiv \triangle OC'A'$  (cazul 1 de congruență, unghiurile cu laturile respectiv congruente, fiind diferențe dintre unghiuri congruente cu același unghi). De aici rezultă congruența triunghiurilor dreptunghice  $BCA$  și  $B'C'A'$  (catete congruente), deci  $AB \equiv A'B'$  q.e.d.

## CONGRUENȚA FIGURILOR ÎN SPAȚIU

Dacă punctele unei mulțimi în spațiu (de pildă ale unui corp) se obțin toate din toate punctele altei mulțimi, aplicând o izometrie sau o compunere de mai multe izometrii\*, mulțimile se numesc congruente și se spune că am suprapus o mulțime peste cealaltă.

## CENTRU, AXĂ, PLAN DE SIMETRIE ALE UNEI MULȚIMI DE PUNCTE

Dacă toate punctele unei mulțimi au, față de același centru de simetrie, simetricele lor tot în această mulțime, se spune că mulțimea are un centru de simetrie.

În mod asemănător se vorbește de axa, sau de planul, de simetrie al unei mulțimi de puncte (de pildă corp).

\* Care este în fond tot o izometrie!



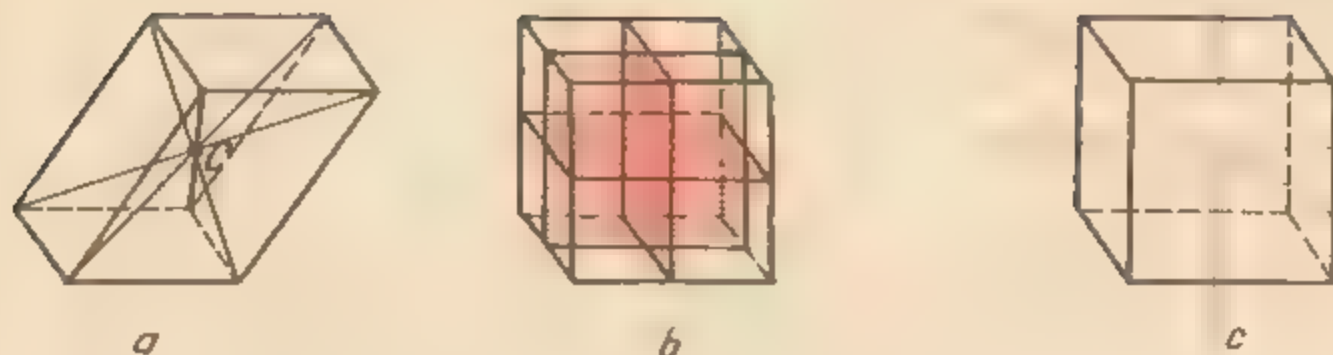


Fig. 17.10

Paralelipipedul are un centru de simetrie care este intersecția diagonalelor (fig. 17.10, a), dar numai cel dreptunghic are plane de simetrie: planele mediatoare ale muchiilor (fig. 17.10, b) și axe de simetrie: dreptele care unesc mijloacele fețelor opuse (fig. 17.10, c).

### PROBLEME 17

1. Care sînt planele de simetrie ale unui diedru?
2. Care sînt planele de simetrie a două plane distincte? Discuție (după cum ele sînt paralele sau secante).
3. Dar care sînt axele de simetrie a acestor plane?
4. Cîte centre, axe și plane de simetrie are un cub?
5. Cîte centre, axe și plane de simetrie are un tetraedru regulat?
6. Care sînt prisme regulate, care au centru de simetrie? Dar axe? Dar plane? Cîte?
7. Aceleași întrebări pentru piramide regulate.
8. Se dau, în spațiu, o dreaptă  $d$  și două puncte  $P$  și  $Q$ . Se dau simetricele  $P'$  ale punctului  $P$  față de fiecare punct al dreptei  $d$ , apoi simetricele  $Q'$  ale fiecărui punct al dreptei  $d$  față de  $Q$ . Să se arate că toate punctele  $P'$  și  $Q'$  sînt situate în același plan  $\alpha$  paralel cu  $d$ .
- 9\*. Un triunghi  $ABC$ , cu unghiurile  $B$  și  $C$  ascuțite, se proiectează pe un plan  $\alpha$ , care conține latura  $BC$ . Fie  $A'$  proiecția lui  $A$  pe  $\alpha$ . Să se demonstreze că  $\angle BA'C > \angle BAC$ .

# SUPRAFEȚE ȘI CORPURI ROTUNDE

## GENERALITĂȚI. CONSIDERAȚII INTUITIVE

a. În capitolele de geometrie în spațiu de până acum, am studiat figuri geometrice formate din linii drepte sau porțiuni de linii drepte (segmente), suprafețe plane sau porțiuni de suprafețe plane (poligoane) și corpuri mărginite de astfel de suprafețe.

Viața de toate zilele și diverse alte activități ne pun însă mereu în contact cu linii curbe, cu suprafețe curbe, cu corpuri mărginite de suprafețe curbe, pe care, în mod obișnuit, le numim *corpuri rotunde*.

Nu avem intenția să dăm definiția generală a unei linii curbe sau a unei suprafețe curbe (aceasta necesită cunoașterea noțiunii de continuitate, care se predă abia în clasa a XI-a).

În acest paragraf intenționăm să descriem câteva fapte intuitive, care să contureze mai bine aceste noțiuni. Abia în paragrafele următoare, unde vom defini și studia câteva suprafețe curbe particulare, vom folosi un limbaj matematic precis.

b. Un punct în mișcare descrie o linie curbă (fig. 18.1); nu orice linie curbă este conținută într-un plan.

Un fir de ață, indiferent cum l-am deforma, ne sugerează o linie curbă (fig. 18.1).



Fig. 18.1



Fig. 18.2

Muchia unui corp este, în general, o linie curbă (fig. 18.2).

Evident că noi considerăm linia dreaptă ca un caz particular al liniei curbe. Pozițiile diferitelor puncte pe o linie curbă dată se pot preciza, dacă am fixat un punct pe acea curbă ca origine, prin distanțele pe curbă de la ele până la acel punct, deci printr-un număr real (fig. 18.3).

O curbă „n are nici lățime, nici grosime“, ci numai lungime.

Fig. 18.3



c. O suprafață curbă este fața (imaginea) unui corp rotund (fig. 18.4). O țesătură, deformată chiar, este o suprafață curbă (fig. 18.5).

Fig 18.4



Țesătura este formată din fire; o linie curbă în mișcare descrie (generează) o suprafață curbă (fig. 18.5 și 18.6)



Fig. 18.5



Fig. 18.6

Poziția unui punct pe o suprafață curbă se poate preciza numai dând două coordonate ale sale (fig. 18.7).

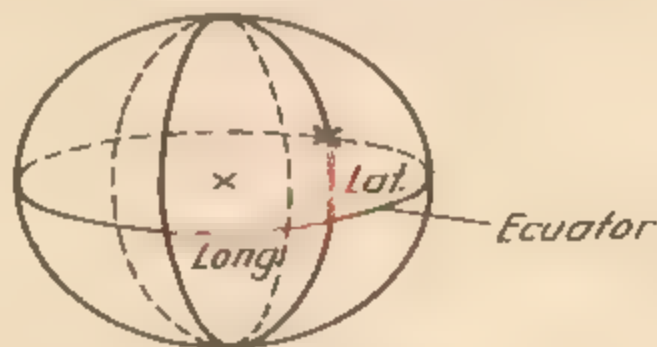


Fig. 18.7

d. Oricum am lua o linie curbă și un fir de ață, putem deforma acest fir, fără a-l întinde sau rupe, astfel încât el să coincidă cu linia curbă dată (fig. 18.8).



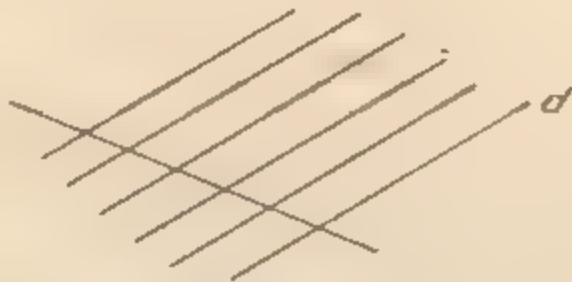
Fig. 18.8



Acest fapt nu este adevărat pentru suprafețe. Nu putem așeza o foaie de hirtie peste o minge, fără a o „strica”. Aceasta face ca desenarea unui planiglob să fie dificilă și să nu se poată face decât obținind o imagine deformată a suprafeței Pământului.

e. *Suprafețe cilindrice.* Am afirmat că orice linie curbă în mișcare descrie o suprafață curbă. O linie dreaptă  $d$ , care se mișcă paralel cu ea însăși, întâlnind în permanență o dreaptă dată descrie un plan (fig. 18.9).

Fig. 18.9



Știm că o linie dreaptă  $d$ , care se mișcă paralel cu poziția ei inițială, întâlnind în permanență un poligon plan ( $\mathcal{P}$ ) dat, situat într-un plan neparalel cu  $d$ , descrie o suprafață prismatică. Să înlocuim acum poligonul ( $\mathcal{P}$ ) cu o linie curbă oarecare fixată. Sintem conduși astfel la următoarea.

**Definiție.**

Dreptele  $d$  se numesc *generatoare* ale suprafeței cilindrice, iar ( $C$ ) se numește *directoare* a suprafeței cilindrice (fig. 18.10).

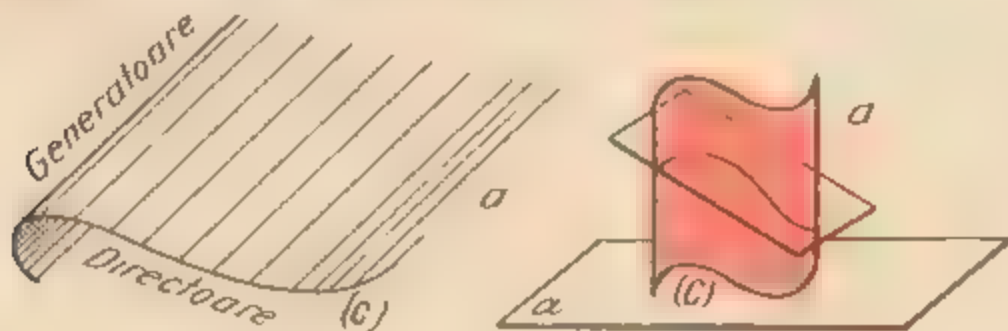


Fig. 18.10

Dacă  $\alpha$  este perpendiculară pe planul lui ( $C$ ) suprafața se numește *față cilindrică dreaptă, de bază ( $C$ )*.

*Observație* Pe o suprafață cilindrică dată există multe curbe plane (intersecția suprafeței cilindrice cu diverse plane). Oricare din ele, care intersectează toate generatoarele, poate fi folosită pentru generarea suprafeței cilindrice, ca în definiția de mai sus.

În acest mod, orice suprafață cilindrică poate apărea ca suprafață cilindrică dreaptă, (dacă vom considera ca directoare intersecția ei cu un plan perpendicular pe generatoare).

O linie curbă plană poate fi un arc, o curbă închisă, sau poate avea auto-intersecții (fig. 18.11).



Fig. 18.11

Suprafețele cilindrice generate au forme corespunzătoare celor din fig. 18.12.

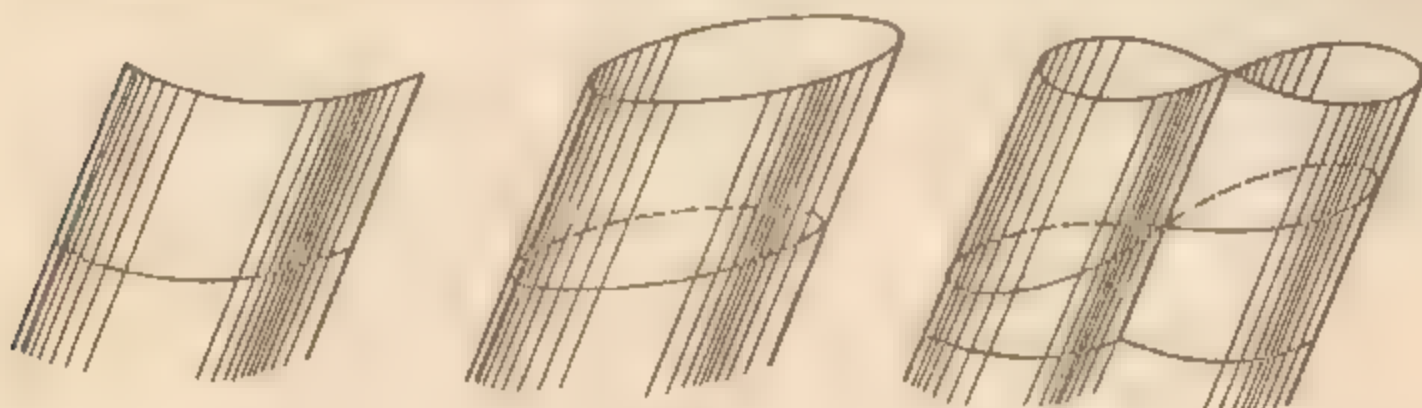


Fig. 18.12

O proprietate importantă a suprafeței cilindrice generate de un arc simplu este aceea că ea se poate „desfășura” și așeza pe o suprafață plană. Cel mai simplu se vede acest lucru reprezentând suprafața ca o suprafață cilindrică dreaptă de bază  $(C)$ , „îndreptind”  $(C)$  până la o dreaptă  $d$  și apoi așezând generatoarele suprafeței perpendicular pe  $g$ .

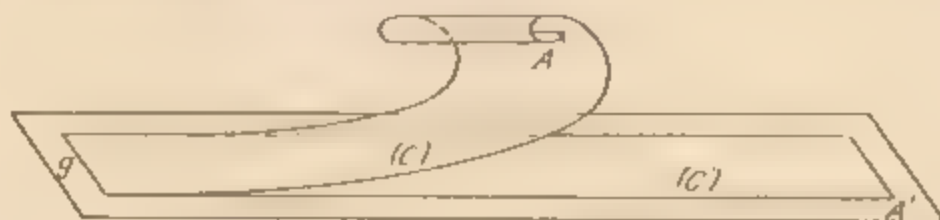


Fig. 18.13

f. *Pinze conice.* Fie  $(C)$  o curbă plană și  $P$  un punct situat în afara planului ei. Totalitatea semidreptelor cu originea în  $P$  și având un punct situat pe

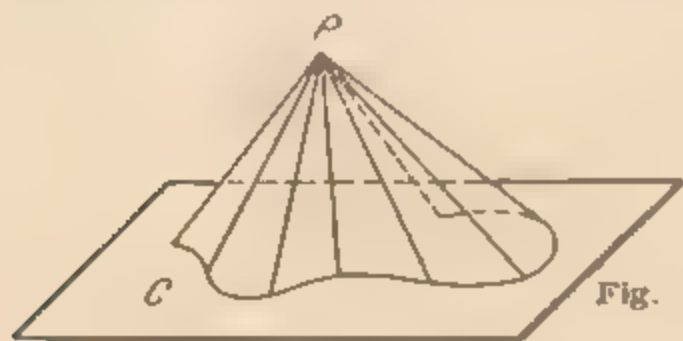


Fig. 18.14





( $C$ ) formează pînza conică de vîrf  $P$  și bază ( $C$ ). Semidreptele se numesc *generatoare* ale pînzei conice (fig. 18.14).

*Observație.* Pe o pînză conică există multe curbe plane (intersecțiile ei cu diferite plane). Oricare din ele, care intersectează toate generatoarele, poate fi considerată că generează pînza conică.

Pinzele conice pot fi generate și de curbe în spațiu.

Și pinzele conice generate de arce de curbă, „suficient de scurte”, pot fi desfășurate și așezate pe un plan. Cel mai simplu mod de a face aceasta este de a alege o distanță  $l$ , de a așeza pe fiecare generatoare un segment de lungime  $l$ , obținînd o curbă (în general neplană) (fig. 18.15).

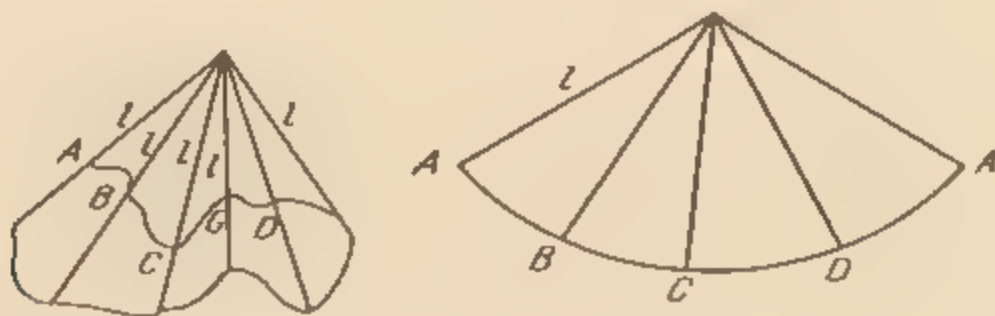


Fig. 18.15

Așezăm curba peste un arc de cerc de rază  $l$  (ceea ce este posibil dacă lungimea curbei nu depășește  $2\pi l$ ) și generatoarele respective peste razele corespunzătoare ale cercului.

g. *Observație.* Suprafețele cilindrice ne-au apărut drept „analoagele curbe” ale suprafețelor prismatice, iar pinzele conice drept „analoagele curbe” ale suprafețelor piramidale.

## CILINDRII CIRCULARI

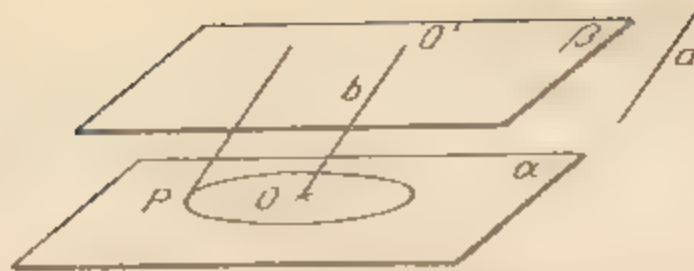
**Definiție.** a) Fie ( $C$ ) un cerc situat în planul  $\alpha$  și  $a$  o dreaptă neparalelă cu  $\alpha$ . Prin suprafață cilindrică circulară generată de ( $C$ ) și  $a$ , înțelegem totalitatea punctelor situate pe toate dreptele paralele cu  $a$ , care trec prin puncte ale lui ( $C$ ).

b) Prin suprafață cilindrică circulară dreaptă generată de cercul ( $C$ ) din planul  $\alpha$ , înțelegem suprafața cilindrică generată de ( $C$ ) și de o perpendiculară  $a$  pe  $\alpha$ . Aceasta este, de fapt, totalitatea punctelor situate pe toate dreptele perpendiculare pe  $\alpha$ , care trec prin puncte ale lui ( $C$ ).

Ea poate fi definită și drept totalitatea punctelor a căror proiecții pe  $\alpha$  sînt situate pe ( $C$ ).

**Teoremă.** Intersecția dintre o suprafață cilindrică și un plan  $\beta$  paralel cu planul  $\alpha$  al cercului ( $C$ ) care o generează, este un cerc de rază  $R$ , egală cu cea a lui ( $C$ ).

Fig. 18.16

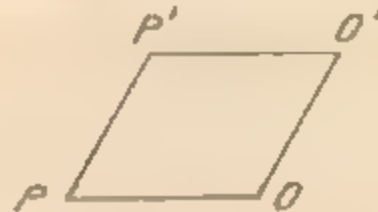


**Demonstrație.** Fie  $O$  centrul lui  $(C)$ ,  $b$  paralela (fig. 18.16) prin  $O$  la  $a$  și  $O'$  intersecția lui  $b$  cu planul  $\alpha$ . Să arătăm că intersecția lui  $\beta$  cu suprafața cilindrică este cercul de centru  $O'$  și de rază  $R$ , situat în planul  $\beta$ .

Fie  $P' \in \beta$ . Îl considerăm diferit de  $O'$ , deoarece  $O'$  nu se află pe suprafața cilindrică.

Să ducem planul  $(P'OO')$  (unic determinat). Acest plan taie planele  $\alpha$  și  $\beta$  după două drepte paralele. Ducând și paralela din  $P'$  la  $OO'$ , se formează în planul  $(P'OO')$  un paralelogram  $P'O'OP$  ( $P \in \alpha$ ) (fig. 18.17).

Fig. 18.17



Punctul  $P'$  se află pe suprafața cilindrică, dacă și numai dacă,  $P \in (C)$ , deoarece  $P'P = O'O \parallel a$ , adică dacă și numai dacă,  $PO = R$ . Cum  $P'O' = PO$ ,  $PO = R$  este echivalent cu  $P'O' = R$  și teorema este demonstrată.

**Definiție.**

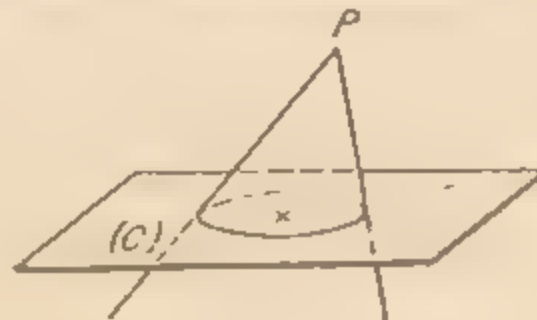
*ce generează suprafața cilindrică.*

*circulară corespunzătoare este dreaptă.*

## PINZE CONICE CIRCULARE

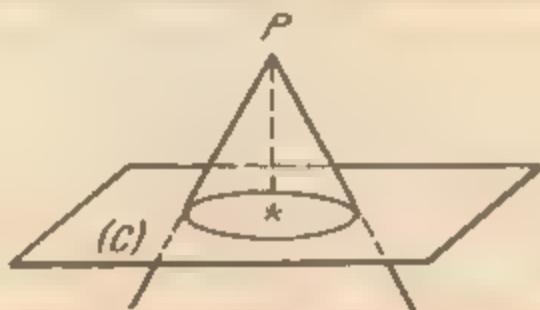
**Definiție.** Fie  $(C)$  un cerc și  $P$  un punct nesituat în planul  $\alpha$  al cercului. Se numește pînză conică circulară de vîrf  $P$  și bază  $(C)$ , totalitatea punctelor situate pe semidreptele cu originea în  $P$  ce întîlnesc cercul  $(C)$  (fig. 18.18).

Fig. 18.18



**Definiție.** O plină conică circulară de vîrf  $P$  și bază  $(C)$  se numește dreaptă dacă proiecția lui  $P$  pe planul cercului  $(C)$  este centrul lui  $(C)$ .

Fig. 18.19



**Definiție.**

(fig. 18.20).

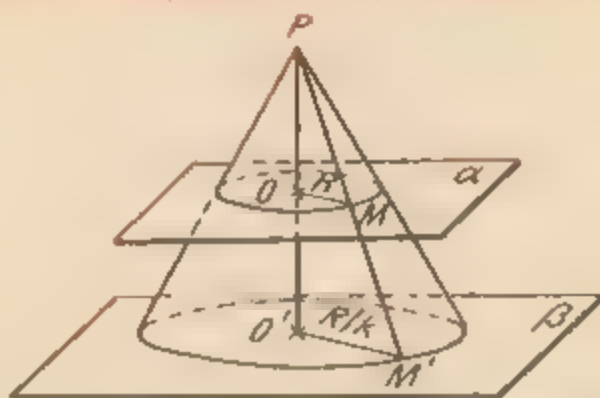
Fig 18.20



**Teoremă.**

baza, situat de aceeași parte a vîrfului cu ea, este un cerc

Fig. 18.21



**Demonstrație.** Fie  $P$  vîrfurile conului,  $(C)$  cercul de bază,  $O$  centrul său,  $\alpha$  planul cercului  $(C)$  și  $\beta$  un plan paralel cu planul  $\alpha$ . Să considerăm intersecția  $O'$  a lui  $PO$  cu planul  $\beta$ . Să alegem  $M' \in \beta$  ( $M' \neq O'$ ) (fig. 18.21).

Planul  $(M'OP)$  taie planul  $\alpha$  după o dreaptă  $OM \parallel O'M'$ . Fie  $M \in PM'$ . Avem  $\frac{OM}{O'M'} = \frac{PO}{P'O'} = k$  (constant).

Punctul  $M'$  se află pe plina conică, dacă și numai dacă,  $M$  se află pe  $(C)$ , deci, dacă și numai dacă,  $OM = R$  este raza lui  $(C)$ . Conform relației de mai sus, aceasta este adevărată, dacă și numai dacă,  $O'M' = \frac{R}{k}$ , ceea ce înseamnă că  $M'$  se află pe cercul de centru  $O'$  și de rază  $\frac{R}{k}$ , situat în planul  $\beta$ .

**Comentariu.** Centrele cercurilor de secțiune sînt colniare cu virful, deci, înlocuind cercul generator al unei pinze conice circulare drepte cu un cerc dintr-un plan paralel cu acesta, situat pe pinza conică, se obține un alt cerc generator în raport cu care pinza conică este tot dreaptă.

**Definiție.**

*circulară este dreaptă.*

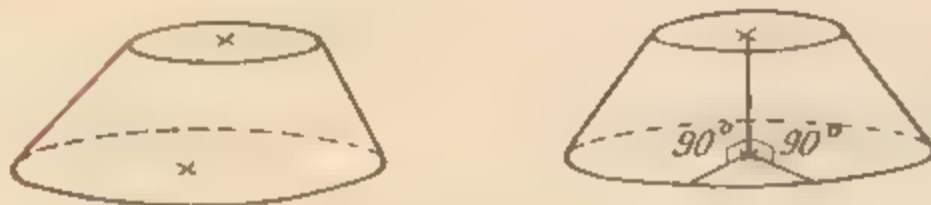


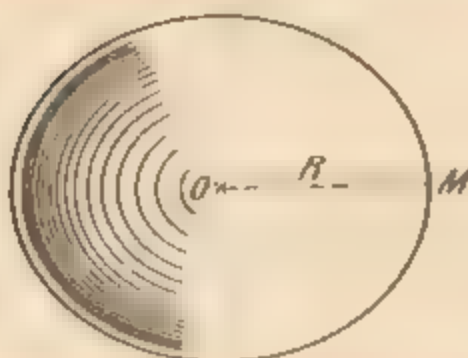
Fig. 18.22

**Observație**

## SFERA

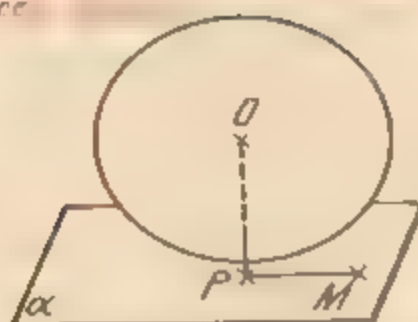
**Definiție.**

Fig. 18.23



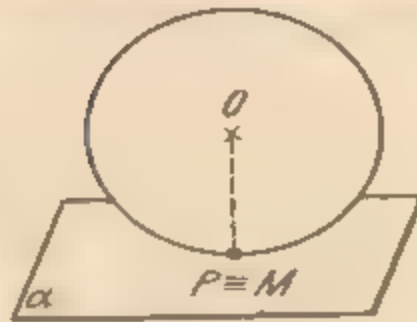
**Teoremă.**

*pe ace*



$$R < OP < OM$$

Fig. 18.24



$$OP = OM = R$$

Fig. 18.25



$$OP < R$$

Fig. 18.26

**Demonstrație.** Fie  $O$  centrul sferei,  $R$  raza sa și fie  $\alpha$  un plan. Ceea ce cere enunțul este de a determina locul geometric al punctelor  $M$  din  $\alpha$ , pentru care  $OM = R$ .

Fie  $P$  piciorul perpendicularei din  $O$  pe planul  $\alpha$ .

Dacă  $R < OP$ , cum  $OM > OP$ , oricare ar fi  $M \in \alpha$ , atunci nu există puncte  $M$  pentru care  $OM = R$  (fig. 18.24).

Dacă  $R = OP$ , atunci  $OM = R$ ,  $M \in \alpha$  este posibil numai pentru  $M = P$  (fig. 18.25), oblicele fiind mai lungi decât perpendiculara. În acest caz intersecția se reduce la punctul  $P$ .

Dacă  $R > OP$ , atunci  $OM = R$  este echivalent cu  $MP = \sqrt{R^2 - OP^2}$ , deoarece  $OP \perp PM$ , și deci, intersecția este cercul de centru  $P$  și rază  $\sqrt{R^2 - OP^2}$  (fig. 18.26).

**Teoremă.**

*dintr-un singur punct, sau un cerc*

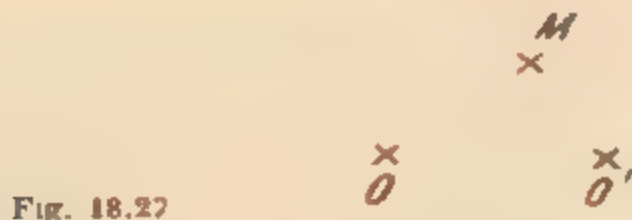


Fig. 18.27

**Demonstrație.** Este clar că dacă sferele *sint* concentrice distincte intersecția lor este vidă.

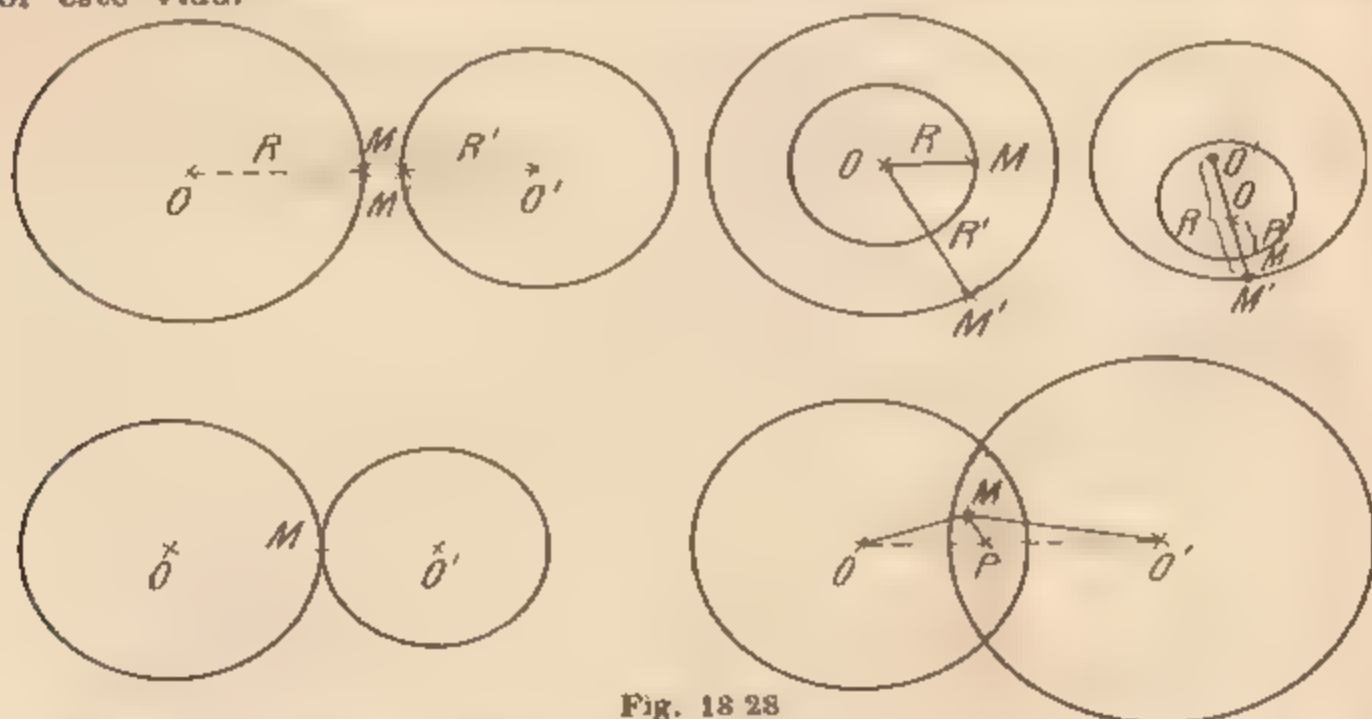


Fig. 18.28

Fie  $O, O'$  centrele sferelor și  $R, R'$  razele lor. Fie  $M$  un punct comun al celor două sfere. Avem  $MO = R$  și  $MO' = R'$ ,  $OO' = \text{constant}$  (fig. 18.27).



Existența lui  $M$  reclamă  $OO' \leq OM + O'M = R + R'$ . Deci dacă  $R + R' < OO'$ , intersecția este vidă (fig. 18.28). Același lucru se întâmplă dacă  $OO' < |R - R'|$ .

Dacă  $OO' = R + R'$  sau dacă  $OO' = |R - R'|$ , atunci  $M$  trebuie să se afle pe  $OO'$ , într-un punct bine determinat de  $OM = R$ ,  $O'M = R'$ , deci, în acest caz, intersecția se reduce la un punct.

În fine, dacă  $|R - R'| < OO' < R + R'$ , atunci, în orice plan ce trece prin dreapta  $OO'$ , putem construi un triunghi (neredus la o dreaptă)  $MOO'$  cu  $MO = R$ ,  $MO' = R'$ .

Să observăm că triunghiul  $MOO'$  este bine determinat, fiind date vîrfurile  $O$ ,  $O'$  ca și lungimile laturilor  $OM$  și  $O'M$ . În particular, lungimile  $OP$  și  $MP$ , unde  $P$  este piciorul perpendicularei din  $M$  pe  $OO'$ , sînt bine determinate (faptul că  $P$  este de aceeași parte a lui  $O$  ca și  $O'$  sau nu, de asemenea, este bine determinat),  $P$  este deci fix.  $M$  este situat în planul  $\beta$  perpendicular pe  $OO'$  în  $P$ , la distanță fixă de  $P$ , deci descrie un cerc de centru  $P$ , situat în planul  $\beta$ .

## TANGENȚA SUPRAFETELOR CURBE

În cazul cînd intersecția dintre o sferă și un plan este formată dintr-un singur punct, spunem că planul este *tangent* la sferă (fig. 18.29).

În cazul cînd intersecția a două sfere este formată dintr-un singur punct, spunem că sferele sînt *tangente*.

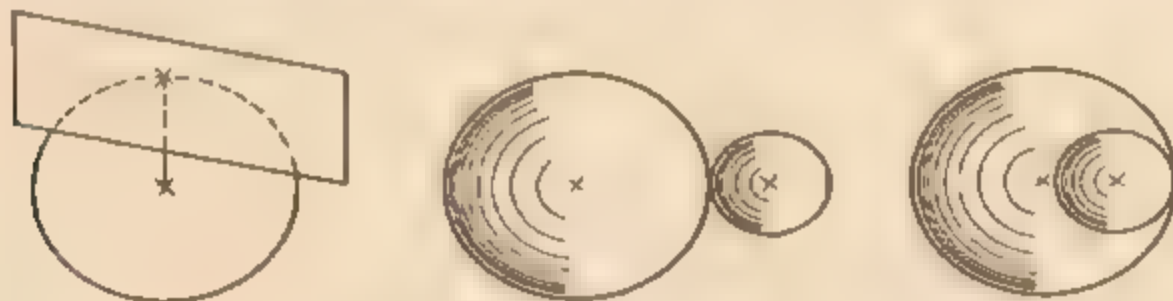


Fig. 18.29

Nu totdeauna două suprafețe tangente au un singur punct comun. Fără a încerca să definim riguros tangența suprafețelor, dăm câteva exemple (fig. 18.30).



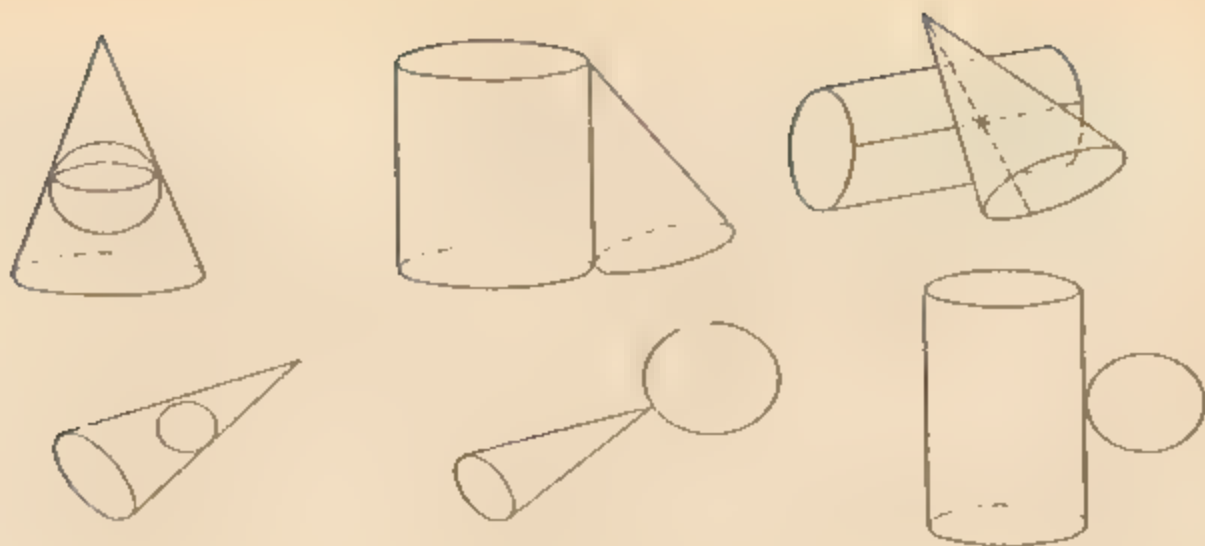


Fig. 18.30

## SUPRAFEȚE DE ROTAȚIE

**Observație.** Dacă aplicăm unui punct  $M$  toate rotațiile în jurul unei drepte  $a$ , obținem, dacă  $M \notin a$ , toate punctele cercului ce trece prin  $M$ , situat în planul perpendicular pe  $a$  și care conține pe  $M$ , cerc cu centrul în proiecția lui  $M$  pe  $a$  (fig. 18.31).



Fig. 18.31

**Definiție.** Dacă aplicăm unui punct  $M$  toate rotațiile în jurul unei drepte  $a$ , obținem, dacă  $M \notin a$ , toate punctele cercului ce trece prin  $M$ , situat în planul perpendicular pe  $a$  și care conține pe  $M$ , cerc cu centrul în proiecția lui  $M$  pe  $a$  (fig. 18.32).

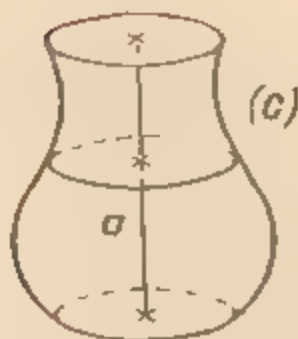


Fig. 18.32

Conform observației precedente, suprafața de rotație se poate defini și ca totalitatea punctelor situate pe toate cercurile avind centrele pe  $a$ , conținute în plane perpendiculare pe  $a$  și care au puncte comune cu  $(C)$ .

**Teoremă.**

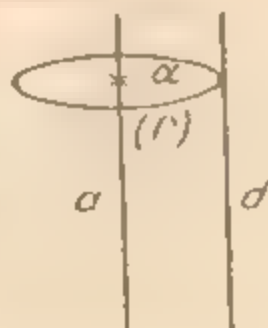
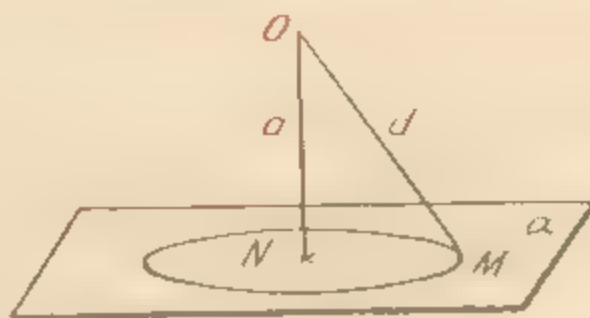


Fig. 18.33

**Demonstrație** Sa considerăm suprafața cilindrică dreaptă delimitată de un cerc  $(C)$  cu centrul pe  $a$ , situat într-un plan  $\alpha$  perpendicular pe  $a$  și care trece prin intersecția lui  $\alpha$  cu  $d$  (fig. 18.33). În dreptă  $d$  va fi generatoare a ei, deci va fi conținută în ea. Secțiunile acestei suprafețe, prin plane perpendiculare pe  $a$ , vor fi toate cercurile de raze congruente cu razele lui  $(C)$ , cu centrele pe  $a$ . Deci, cu centrul în orice punct dat al lui  $a$ , putem duce, într-un plan perpendicular pe  $a$ , un cerc care întâlnește  $d$ . Aceste cercuri „amplă” suprafața de rotație.

**Teoremă.** *Suprafața de rotație este o suprafață cilindrică dreaptă generată de o dreaptă  $d$  și de un cerc  $(C)$  perpendicular pe  $a$  și care are un punct comun cu  $d$ .*

Fig. 18.34



**Demonstrație** Sa luăm un punct  $M$  pe  $d$  și să considerăm cercul  $(C)$  cu centrul în proiecția  $N$  a lui  $M$  pe  $\alpha$ , situat în planul  $\alpha$  ce trece prin  $M$  perpendicular pe  $a$  (fig. 18.34). Cum  $d \perp a$ ,  $N \neq O$ , deci  $O \notin \alpha$  și cum  $d \neq a$ , avem  $M \neq N$ .

Fie pînza conică circulară dreaptă generată de  $O$  și  $(C)$ . Dreapta  $d$  este o generatoare a ei, iar secțiunile ei prin toate planele  $\beta$  paralele cu planul  $\alpha$  sînt cercurile cu centrele în intersecția lui  $\beta$  cu  $a$  și care trec prin intersecția lui  $\beta$  cu  $d$ . Acestea sînt toate cercurile ce constituie suprafața de rotație în discuție.

**Observație.** Dacă  $d \perp a$ , atunci suprafața de rotație este planul perpendicular în  $O$  pe  $a$ .

**Teoremă.** a) *cu el este un cilindru circular drept.*

b)

c)

de mai sus.

**Observație** În cazurile b), c) din teoremă, dacă dreapta este perpendiculară pe segment, se obține un cerc (inclusiv interiorul său), respectiv o coroană circulară (cuprinsă între două cercuri concentrice) (fig. 18.35).

Fig. 18.35



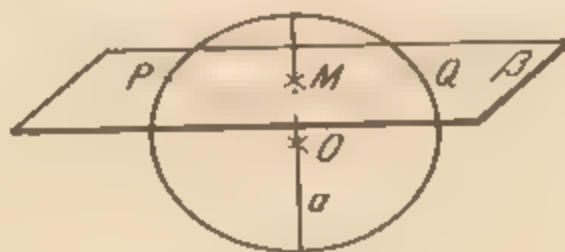
**Teoremă.**

*său este o sferă.*

**Demonstrație.** Fie  $R$  raza lui  $(C)$ . Fie  $(S)$  sfera de centru  $O$ , egal cu centrul lui  $(C)$  de rază  $R$ . Dacă  $\alpha$  este planul lui  $(C)$ , atunci  $(C)$  este intersecția lui  $\alpha$  cu  $(S)$ .

Fie  $a$  o dreaptă care trece prin centrul cercului  $(C)$  și care este conținută în planul său. Să considerăm un plan arbitrar  $\beta \perp a$ , care taie sfera (fig. 18.36). El taie  $a$  după un punct  $M$  din interiorul lui  $(C)$ , deci dreapta  $d = \alpha \cap \beta$

Fig 18.36



taie  $(C)$  în două puncte  $P$  și  $Q$ . Știm că  $\beta$  taie sfera după un cerc, care trece prin  $P$  și  $Q$ , având drept centru proiecția lui  $O$  pe  $\beta$ , care este  $M$ . Aceste cercuri „vor umple” suprafața de rotație.

**Definiție.**



calotă



calotă



zonă

Fig. 18.37

Din cele de mai sus, rezultă că o calotă sferică poate fi considerată un caz particular de zonă sferică.

Să considerăm un plan  $\alpha$  și pe el două drepte  $d$  și  $c$ , formînd un unghi ascuțit în  $N$  (fig. 18.38).

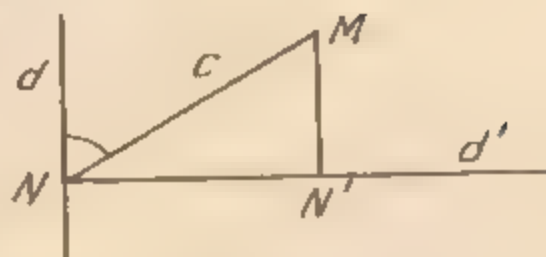


Fig. 18.38

Așezăm  $d$  pe generatoarea unui cilindru circular drept și înfășurăm apoi planul pe cilindru, astfel încît  $N'$  să vină în  $N$  și  $M$  să se afle pe  $d$ . (Bineînțeles am presupus că lungimea cercului de bază al cilindrului este egală, ca măsură, cu segmentul  $NN'$ .) Perpendiculara în  $N$  pe  $d$  se va înfășura pe cercul de bază al cilindrului. Dreapta  $c$  se va înfășura determinînd o curbă numită elice. Filetul unui șurub este o elice.

**Problemă rezolvată.** Un con circular drept de rază  $R$  și înălțime  $2R$  este intersectat cu o sferă cu diametrul cît înălțimea conului și cu centrul la jumătatea înălțimii conului, după un cerc. Să se afle raza cercului de secțiune, în funcție de  $R$ .

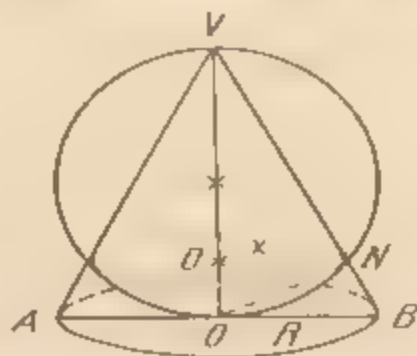


Fig. 18.39

**Rezolvare.** Din triunghiul dreptunghic  $VOB$  (fig. 18.39) deducem  $VB^2 = VO^2 + OB^2$ . Deci,  $VB = R\sqrt{5}$ .

Observăm că triunghiul  $VNO$  este, de asemenea, dreptunghic, fiind înscris într-un semicerc, deci  $VN$  este proiecția lui  $VO$  pe  $VB$ . Deducem că  $4R^2 = VB \cdot VN$ ,  $VN = \frac{4R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{4R}{\sqrt{5}}$ . Din  $\triangle VO'N \sim \triangle VOB$ , unde  $O'$  este centrul cercului de secțiune și  $x$  raza sa, deducem:

$$\frac{VN}{VB} = \frac{x}{R}; \quad \frac{\frac{4R}{\sqrt{5}}}{R\sqrt{5}} = \frac{x}{R}, \quad x = \frac{4R}{5}.$$



## PROBLEME 18

1. Un cilindru se desfășoară pe un plan după un dreptunghi, ale cărui diagonale sînt egale cu  $2a$  și formează între ele un unghi de  $120^\circ$ . Să se afle raza și generatoarea cilindrului.

2. Un cilindru circular drept, așezat cu baza într-un plan orizontal, are generatoarea  $g = 6\sqrt{3}$  m și raza de 6 m. Se înclină cilindrul, astfel încît centrul unei baze să se proiecteze vertical într-un punct al cercului celeilalte baze. Ce unghi formează în acest caz generatoarea cu planul orizontal?

3. Un plan ce conține centrele celor două baze ale unui cilindru circular drept intersectează cercurile celor două baze în  $A$  și  $B$  și respectiv în  $A'$  și  $B'$  ( $A, A'$  sînt pe aceeași generatoare,  $B, B'$  la fel). Găsiți distanța dintre punctele  $A$  și  $B'$ , în funcție de raza  $R$  a bazei și generatoarea  $G$ .

4. Un con circular drept, cu raza bazei 9 cm și înălțimea 20 cm, este intersectat cu un plan paralel cu baza. La ce distanță de vîrf trebuie dus planul, astfel încît raza cercului de secțiune să fie 6 cm?

5. Un con circular drept are diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu  $2/3$  din diametru. La ce distanță de vîrf al conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza, astfel încît lungimea cercului de secțiune să fie  $9\pi$ ?

6. Un con cu generatoarea de 16 cm se desfășoară pe un plan, după un sfert de cerc. Găsiți raza bazei conului.

7. Într-un trunchi de con circular drept cu  $R = 16$  cm și  $r = 8$  cm, se înscriu două conuri care au ca baze, bazele trunchiului și generatoarele unuia în prelungirea generatoarelor celuilalt. Știind că înălțimea trunchiului este de 12 cm, să se afle înălțimile celor două conuri.

8. Fie  $d$  o semidreaptă de origine  $O$ , și un unghi ascuțit  $\theta$ , ambele date. Găsiți locul geometric al punctelor  $M$  din spațiu pentru care unghiul dintre  $OM$  și  $d$  este  $\theta$ .

9. O dreaptă ce trece prin centrul unei sfere cu raza  $R = 10$  cm, intersectează un plan  $\alpha$  într-un punct  $M$ , astfel că  $OM = 26$  cm. Știind că distanța de la  $M$  la proiecția lui  $O$  pe  $\alpha$  este 24 cm, stabiliți poziția planului  $\alpha$  față de sferă.

10. Un plan  $\alpha$  intersectează o sferă cu raza  $R = 0,5$  m, astfel încît aria cercului de secțiune este de 4 ori mai mică decît aria unui cerc mare al sferei. Găsiți distanța de la centrul sferei la planul de secțiune.

11. Fie două sfere de centre  $O$  și  $O'$  și raze  $R$  și  $R'$ . În fiecare din situațiile următoare precizați pozițiile sferelor:

a)  $R = 8$  cm,  $R' = 4$  cm,  $OO' = 3$  cm;

b)  $R = 13,5$  cm,  $R' = 4,5$  cm,  $OO' = 20$  cm;

c)  $R = 2\sqrt{3}$  cm,  $R' = 2(2 - \sqrt{3})$  cm,  $OO' = 3$  cm;

d)  $R = 2(4 - \sqrt{2})$  cm,  $R' = 2(3 - 2\sqrt{3})$  cm,  $OO' = 1$  cm.

12. Două plane paralele intersectează sfera de rază  $R = 5$  cm, după două cercuri cu razele respectiv  $r = 3$  cm și  $r' = 4$  cm. Aflați înălțimea zonei sferice determinată de cele două plane.

13. Găsiți locul geometric al picioarelor perpendicularelor duse din punctul fix  $A$  pe planul variabil ce trece prin punctul fix  $B$ .

## VOLUMELE ȘI ARIILE CORPURILOR ROTUNDE

### VOLUMUL CILINDRULUI

Am văzut că suprafața prismatică era descrisă de o dreaptă care se sprijinea pe o linie poligonală și rămânea mereu paralelă cu o dreaptă dată  $a$ .

Am obținut apoi prisma prin secționarea suprafeței prismatice cu două plane paralele.

Într-un mod analog se obține și cilindrul, doar că dreapta, care generează suprafața cilindrică, nu se mai sprijină acum pe o linie poligonală, ci pe o linie curbă.

De asemenea, așa cum am arătat la pag. 94, am considerat suprafața cilindrică drept „analogul curb” al suprafeței prismatice.

Vom putea accepta că: *Volumul cilindrului este egal cu aria bazei înmulțită cu înălțimea cilindrului.*

Fig. 19.1



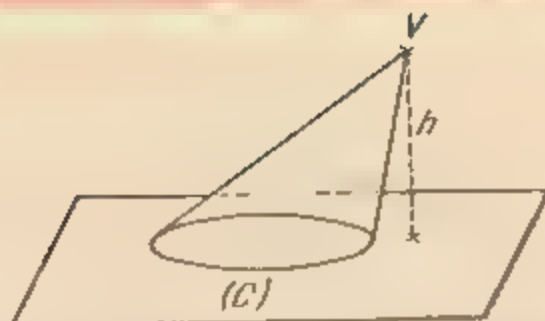
Evident că analogia de mai sus constituie un argument, dar nu o demonstrație riguroasă.

### VOLUMUL CONULUI

Aici vom face analogia între piramidă și con. Acolo am unit un punct exterior unui poligon plan cu toate punctele poligonului.

În cazul conului, punctul exterior—vîrfurile conului—se unește cu toate punctele unei curbe plane. Avînd în vedere această analogie, vom accepta că:

Fig. 19.2



La fel ca la cilindru, această analogie nu constituie o demonstrație riguroasă, ci doar o justificare intuitivă.

Demonstrațiile riguroase pentru calculul acestor volume se vor da în clasele următoare.

## ARIA LATERALĂ A CILINDRULUI ȘI A CONULUI

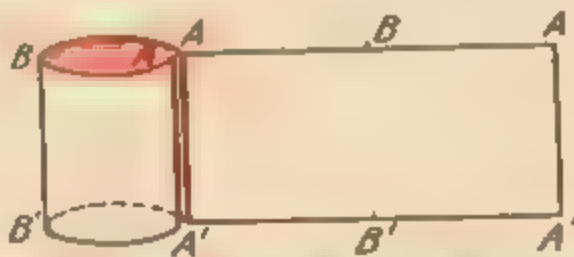
Este mult mai dificil de a defini exact ce înțelegem prin aria unei porțiuni dintr-o suprafață curbă. În cazul nostru avem de a face cu două suprafețe care se pot „așeza pe un plan”, fără a modifica lungimile curbelor de pe ele. Este natural să presupunem că această „așezare” nu modifică nici ariile porțiunilor din aceste suprafețe, porțiuni care se „așază” pe niște porțiuni din plan.

## ARIA LATERALĂ A CILINDRULUI DREPT

Dacă tăiem cilindrul drept după o generatoare, obținem o suprafață care se poate „așeza” pe un plan, devenind un dreptunghi, cu baza segmentul provenit din curba de bază a cilindrului, iar înălțimea, generatoarea după care a fost tăiat cilindrul. Deci:

unde se observă că generatoarea este egală cu înălțimea (fig. 19.3).

Fig. 19.3



Cum cele două baze sînt congruente, ariile lor vor fi egale. Deci:

$$A_t = A_b + 2 \cdot A_b$$

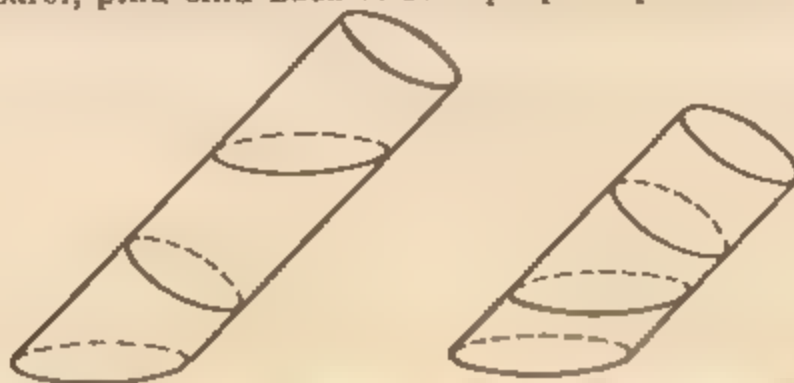
unde  $A_t$ ,  $A_l$  și  $A_b$  sînt respectiv aria totală, aria laterală și aria bazei.

În cazul cilindrului circular drept, avînd raza bazei  $R$  și generatoarea  $G$ , aria totală este

$$A_t = 2\pi RG + 2\pi R^2 = 2\pi R(G + R)$$

**Observație.** Un cilindru oblic se poate transforma într-unul drept, efectuînd o secțiune printr-un plan perpendicular pe generatoare (secțiune normală) și translatînd una din părți în direcția generatoarei, pînă cînd baza ei se suprapune peste cealaltă bază.

Fig 19.4



Deci:

### ARIA LATERALĂ A CONULUI CIRCULAR DREPT

Am văzut că, tăind un con circular drept după o generatoare, suprafața obținută se poate „așeza” pe un plan, devenind un *sector de cerc*, avînd ca rază generatoarea, iar ca arc un arc ce corespunde cercului de bază al conului (fig. 19.5).

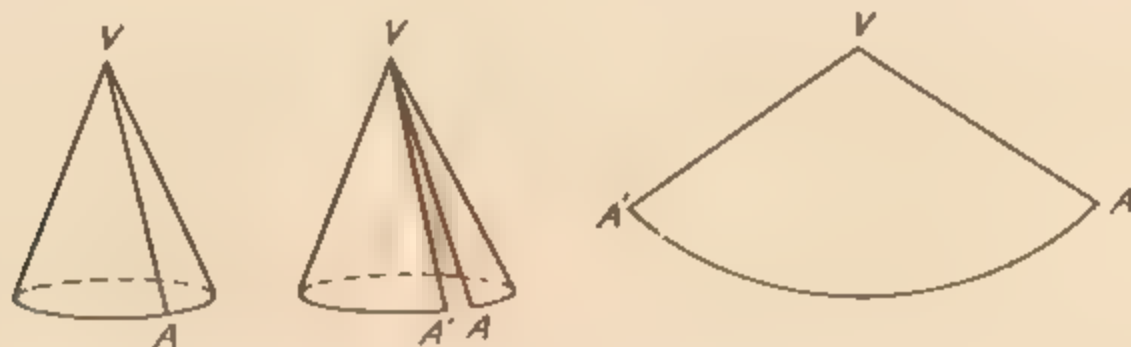


Fig 19.5

Cum aria unui *sector de cerc* este jumătate din produsul lungimii arcului său și raza cercului, în cazul nostru  $\frac{1}{2} (2\pi R)G$ , rezultă că:

*Aria laterală a conului circular drept este egală cu*

$$A_l = \pi RG,$$

unde  $A_l$  este aria laterală,  $R$  este raza bazei conului, iar  $G$  este generatoarea sa.

iar în cazul conului circular drept de rază  $R$  și generatoare  $G$ , aria totală este egală cu

$$A_t = \pi RG + \pi R^2 = \pi R(G + R)$$

Aria laterală a unui con oblic este mult mai dificil de calculat.

## ARIA ȘI VOLUMUL TRUNCHIULUI DE CON CIRCULAR DREPT

Prin analogie cu trunchiul de piramidă, la fel ca mai sus, pentru con și cilindru, deducem:

Volumul unui trunchi de con circular drept este

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

unde  $h$  este înălțimea sa,  $R$  și  $r$  razele bazelor

Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este

$$A_l = \pi(R + r)G,$$

unde  $G$  este generatoarea, iar  $R$  și  $r$  razele bazelor sale

Putem deduce aceste formule și din formulele corespunzătoare pentru con, astfel:

Find dat trunchiul de con circular drept (fig. 19.6) figurăm planul conului din care provine (fig. 19.7) și determinăm elementele  $x$  și  $g$ , din relațiile:

$$\frac{x}{x+h} = \frac{r}{R} = \frac{g}{g+G}.$$

de unde,  $xR = r(x+h)$ , deci  $x = \frac{rh}{R-r}$  și, analog,  $g = \frac{Gr}{R-r}$ .



Fig. 19.6

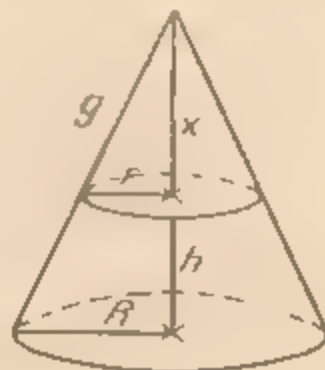


Fig. 19.7



Volumul trunchiului de con este diferența volumelor celor două conuri:

$$V = \frac{\pi(x+h)}{3} R^2 - \frac{\pi x}{3} r^2; \quad x+h = \frac{Rh}{R-r};$$

deci:

$$V = \frac{\pi}{3} h \left( \frac{R^2}{R-r} - \frac{r^2}{R-r} \right) = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

(se împarte  $R^3 - r^3$  la  $R - r$  ca polinoame în  $R$  în  $r$ ).

Analog,

$$A_1 = \pi R(G + g) - \pi r g; \quad G + g = \frac{GR}{R-r};$$

deci:

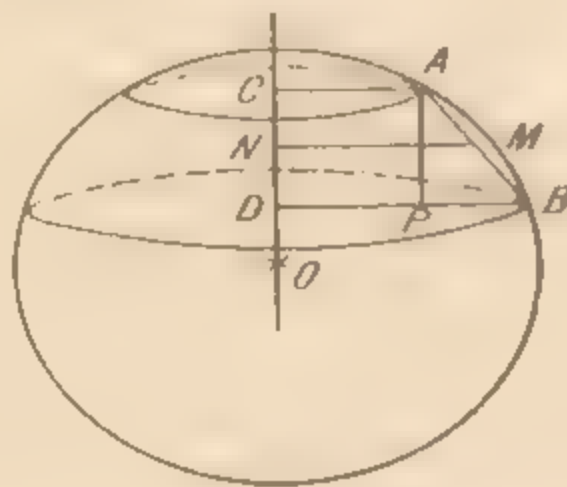
$$A_1 = \pi G \left( \frac{R^2}{R-r} - \frac{r^2}{R-r} \right) = \pi G(R+r).$$

## ARIA SFEREI

Suprafața unei sfere nu se poate „așeza” pe un plan.

Vom începe prin a studia aria laterală a unui trunchi de con circular drept înscris în sferă (fig. 19.8).

Fig. 19.8

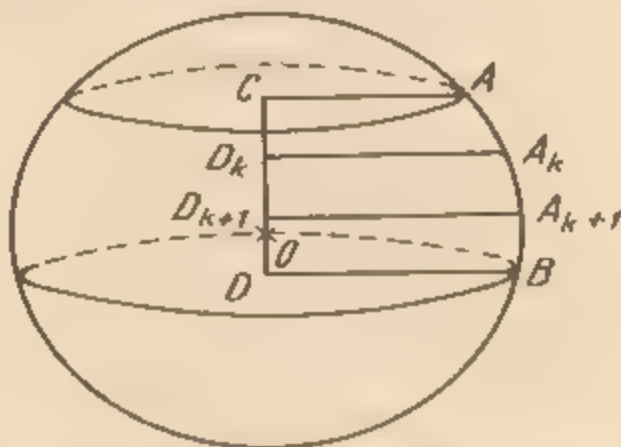


Dacă secționăm figura cu un plan ce trece prin cele două centre  $C$  și  $D$  ale bazelor trunchiului de con, plan ce va trece prin centrul  $O$  al sferei, intersecția cu sfera va da un cerc cu centrul în  $O$ . Generatoarea trunchiului de con va fi o coardă  $AB$  în acest cerc. Fie  $M$  mijlocul acestei coarde. Lungimea  $MN$  a perpendicularei din  $M$  pe dreapta  $OC$  este egală cu  $\frac{R+r}{2}$ . Dacă  $P$  este piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $BD$ , atunci  $\triangle OMN$  este asemenea cu  $\triangle APB$ , deci  $\frac{MN}{OM} = \frac{AP}{AB}$ , sau  $MN \cdot AB = OM \cdot AP$ . Deci, aria laterală a

trunchiului de con circular drept poate fi scrisă  $\mathcal{A}_i = \pi \cdot 2MN \cdot AB = \pi \cdot 2OM \cdot AP = 2\pi \cdot OM \cdot CD$ . Aceasta permite sumarea unor astfel de arii, deoarece  $OM$  este același. Anume:

Să considerăm o „zonă sferică”, secționată cu un plan ce trece prin centrele  $C, D$  ale cercurilor ce o formează (fig. 19.9).

Fig. 19.9



Să facem în acest caz un raționament mai riguros decât în cazul celorlalte suprafețe curbe pe care le-am considerat pînă acum.

Să împărțim arcul  $AB$  în  $n$  părți egale prin punctele  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$  și să considerăm cele  $n$  trunchiuri de con circular drept ce au ca generatoare  $A_k A_{k+1}$  și drept centre ale fețelor (bazelor) proiecțiile  $D_k, D_{k+1}$  ale lui  $A_k A_{k+1}$  pe  $CD$ .

Suma ariilor laterale ale acestor trunchiuri de con va aproxima aria zonei sferice.

Fie  $M_k$  mijlocul lui  $A_k A_{k+1}$ . Știm că aria laterală a trunchiului de con respectiv este  $\pi \cdot 2OM_k \cdot D_k D_{k+1}$ . Dar  $OM_k$  este același pentru toți  $k$ , deci suma acestor arii este  $2\pi OM_k \cdot CD$ .

Făcînd pe  $n$  tot mai mare,  $A_k A_{k+1}$  devine tot mai mic,  $OM_k$  se apropie de raza  $R$  a sferei. Deci:

Aria unei zone sferice este egală cu  $2\pi R \cdot H$  unde  $R$  este raza sferei din care face parte, iar  $H$  este distanța dintre acele plane care determină zona sferică. Această formulă se folosește și la calculul ariei unei calote sferice.

Pentru  $H = 2R$  obținem toată sfera, deci aria sferei de rază  $R$  este egală cu  $4\pi \cdot R^2$ .

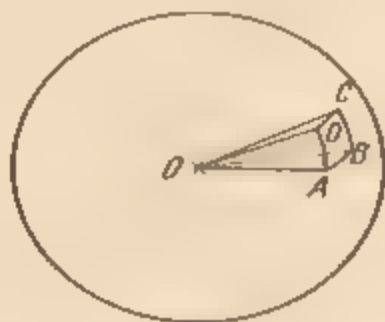
## VOLUMUL SFEREI

Volumul unei sfere de rază  $R$  este egal cu o treime din produsul dintre aria acestei sfere și raza ei, adică:

Această afirmație se poate argumenta în același mod în care s-a argumentat faptul că aria cercului este egală cu o jumătate din produsul dintre lungimea cercului și rază. Vom presupune sfera umplută cu piramide cu vîrfurile în centrul ei și bazele patrulatele cu vîrfurile pe sferă. Vom observa că înălțimile lor aproximează raza sferei, iar suma ariilor bazelor lor aproximează aria sferei. Suma volumelor lor va aproxima volumul sferei și va fi o treime din înălțimea comună (raza sferei) înmulțită cu suma ariilor bazelor (aria sferei).

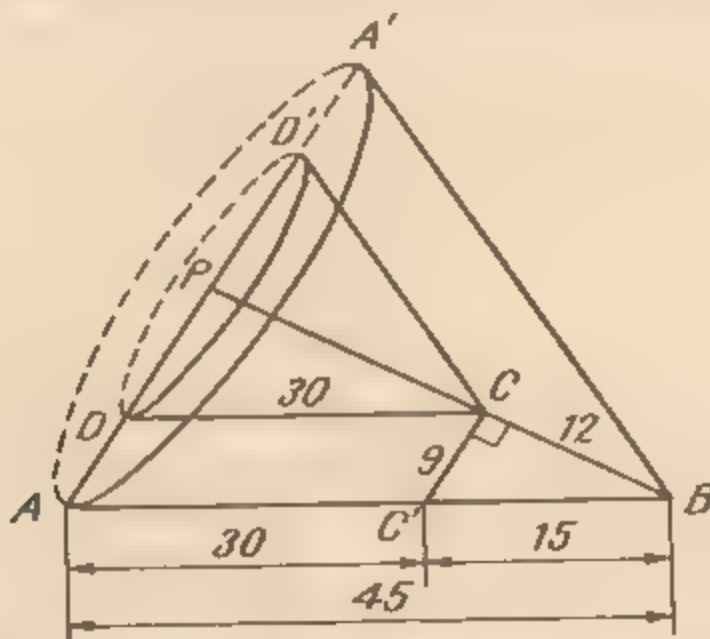
$$V = \frac{R}{3} \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Fig. 19.10



**Problemă rezolvată.** Un trapez are bazele de 30 cm și 45 cm, iar laturile neoparalele de 9 cm și 12 cm. Să se calculeze aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul laturii de 12 cm.

Fig. 19.11



**Rezolvare.** Înainte de a începe rezolvarea propriu-zisă a problemei, atragem atenția asupra modului în care este bine să faceți desenul corpurilor de rotație.

Cînd vreți să vedeți ce formă are un corp, provenind din rotirea unei figuri plane în jurul unei axe, este bine să procedați în modul următor: desenați simetrica figurii plane în față de axă, iar cu extremitățile în vîrfurile simetrice duceți elipse, cu axa mică cît mai mică.

Spre exemplu, în cazul problemei noastre, notăm cu  $P = AD \cap BC$  și  $CC' \parallel AD$ ,  
 $\triangle CC'B \sim \triangle PAB \Rightarrow \frac{AP}{9} = \frac{BP}{12} = \frac{45}{15} = 3$ ,  $AP = 27$  cm,  $BP = 36$  cm. Din  $\triangle CC'B \sim \triangle PDC \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{PC}{12} = \frac{18}{9} = 2$ ,  $PC = 24$  cm. Observăm că  $AP^2 + BP^2 = AB^2$ , ( $27^2 + 36^2 = 45^2$ )  
 Deci  $\angle APB = 90^\circ$ . Fie  $A'$  și  $D'$  simetricele lui  $A$  și  $D$  față de  $BC$ , ele se vor găsi  
 pe prelungirea lui  $AP$ . Descriem cercuri cu diametrele  $AA'$  și  $DD'$  (pe care le desenăm  
 în spațiu așa cum se vede în figura 19.11). Simetricele punctelor  $B$  și  $C$  față de axa de  
 rotație coincid cu ele însele.

Deci, acum observăm că s-a format un con circular drept (cu vârful în  $B$  și cu baza  
 cercul de diametru  $AA'$ ) din care lipsește un alt con (cu vârful în  $C$  și cu baza cercul de  
 diametru  $DD'$ ), asemenea cu el.

$$\text{Volumul conului mic este } v = \frac{\pi 18^2 \cdot 24}{3} \text{ cm}^3.$$

$$\text{Volumul conului mare este } \mathcal{V} = \frac{\pi 27^2 \cdot 36}{3} \text{ cm}^3. \text{ Deci,}$$

$$\mathcal{V} - v = \frac{\pi 27^2 \cdot 36}{3} - \frac{\pi 18^2 \cdot 24}{3} = \frac{\pi 9^2 \cdot 12}{3} (3^2 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2) = \pi 9^2 \cdot 4 \cdot 19 = 6\,156\pi,$$

$$\mathcal{V}' = 6\,156\pi \text{ cm}^3.$$

Pentru a calcula aria totală, vom observa asemănarea dintre cele două conuri, raportul  
 de asemănare fiind  $\frac{2}{3}$ . Notînd cu  $\mathcal{A}_1$  aria laterală a conului mic și cu  $\mathcal{A}'_1$  aria laterală  
 a conului mare, putem scrie:

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}'_1} = \frac{4}{9}, \mathcal{A}_1 = \frac{4}{9} \cdot \pi \cdot 27 \cdot 45 = 540\pi \text{ cm}^2.$$

$$\mathcal{A}' = 540\pi + 1215\pi + 405\pi = 2160\pi; \mathcal{A}' = 2160\pi \text{ cm}^2.$$

## PROBLEME 19

1. Dintr-o bară de oțel, sub formă de prismă patrulateră regulată cu latura bazei  
 de 12 cm și înălțimea de 4,5 m, se strunjește un ax cilindric, cu pierdere minimă de mate-  
 rial. Să se afle volumul axului obținut.

2. Să se afle volumul unui cilindru circular drept înscris într-o prismă triunghiulară  
 regulată dreaptă care are latura bazei  $4\sqrt{3}$  dm și înălțimea de 10 dm.

3. Un con circular drept are raza bazei de 6 cm și generatoarea de 10 cm. Găsiți  
 volumul conului.

4. Un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) se rotește, pe rînd, în jurul catetelor și  
 apoi al ipotenuzei.

a) Dacă  $AB = 5$  dm și  $AC = 12$  dm, găsiți cele trei volume  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{V}_2$  și  $\mathcal{V}_3$ .

b) Dacă  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $V_1$  și  $V_2$  sînt volumele obținute prin rotirea triunghiului în jurul catetelor, iar  $V$  prin rotirea în jurul ipotenuzei, arătați că:

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}.$$

c) Formulați și demonstrați o reciprocă la punctul b).

5\*. Un con circular drept are raza bazei  $r = 0,8$  m. El are trei generatoare două cîte două perpendiculare.

a) Aflați volumul conului.

b) Rezolvați problema în cazul general, cînd raza bazei este  $r$ .

6\*. Calculați volumul unui con circumscris unui tetraedru regulat de muchie  $a = 6$  cm.

7. Un dreptunghi cu laturile  $a$  și  $b$  ( $a < b$ ) se rotește în jurul lui  $a$  și apoi în jurul lui  $b$ .

a) În ce caz se obține aria laterală mai mare?

b) În ce caz se obține volumul mai mare?

8. Un trapez dreptunghic  $ABCD$  ( $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$ ) se rotește în jurul unei paralele cu  $BC$ , distanța de la  $BC$  la axă fiind de 3 cm (se consideră axa în planul trapezului, dar în afara lui). Dacă  $AB = 12$  cm,  $AD = 10$  cm și  $CD = 4$  cm, să se afle aria totală și volumul corpului format.

9. Aria totală a unui cilindru circular drept este de  $132\pi$  cm<sup>2</sup>, iar cea laterală  $96\pi$  cm<sup>2</sup>. Să se afle volumul cilindrului.

10. Un con se desfășoară pe un plan după un semicerc cu diametrul de 20 cm. Să se afle volumul conului.

11\*. Un trapez dreptunghic se rotește, odată în jurul bazei mici, altă dată în jurul bazei mari. Cunosînd volumele  $V_1$  și  $V_2$  ale corpurilor astfel obținute, precum și latura  $a$  perpendiculară pe baze, să se calculeze, în funcție de  $V_1$ ,  $V_2$  și  $a$ , diferența dintre bazele trapezului.

12\*. Într-un con circular drept cu diametrul bazei egal cu  $12\sqrt{2}$  cm și înălțimea egală cu 6 cm, se înscrie un cub astfel încît o față a sa să se găsească în planul bazei conului, iar vîrfurile celorlalte baze să fie situate pe planul conic.

a) Să se găsească volumul cubului.

b) Rezolvați aceeași problemă în cazul cînd diametrul bazei cercului este  $2a\sqrt{2}$  și înălțimea conului  $a$ .

13. Un con circular drept, care are raza bazei de 8 m și înălțimea de 16 m, se taie cu un plan paralel cu planul bazei, determinînd astfel un trunchi de con de înălțime 12 m.

a) Să se calculeze volumul trunchiului de con format.

b) Să se determine la ce distanță de planul bazei trebuie să se facă o secțiune în con, printr-un plan paralel cu baza, astfel ca arile laterale ale celor două corpuri formate să fie egale.

14. Un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) se rotește în jurul perpendicularei în  $B$  pe  $BC$ . Dacă  $AB = 3$  cm și  $AC = 4$  cm, găsiți volumul corpului format.

15. Un trunchi de con circular drept are aria laterală  $220\pi$  cm<sup>2</sup> și generatoarea 10 cm. Știind că raportul razelor trunchiului este de  $4/3$ , să se afle aria totală și volumul trunchiului de con.



16. Într-o sferă cu raza  $R = 5$  m, se înscrie un con cu înălțimea  $h = 8$  m. Să se afle:

- a) aria și volumul sferei;
- b) aria și volumul conului;
- c) ariile calotelor formate.

17. Un con circular drept, în care generatoarele fac unghiuri de  $30^\circ$  cu înălțimea, taie dintr-o sferă, cu centrul în vârful conului, o calotă. Raza sferei fiind  $R$ , să se afle aria calotei.

18\*. O piramidă, cu baza pătrat de latură  $a$ , are toate fețele laterale triunghiuri echilaterale. Calculați raza semisferei cu centrul în centrul bazei piramidei și tangentă la fețele laterale ale piramidei.

19. Dacă două cercuri necoplanare au două puncte comune, atunci ele sînt situate pe aceeași sferă.

20\*. Dacă un poliedru are toate vîrfurile sale pe o sferă, atunci toate fețele sale sînt poligoane inscriptibile.

21\*. Piramida  $VABCD$  are baza  $ABCD$  dreptunghi. Din  $C$  ducem  $CP \perp VA$  ( $P \in AV$ ), iar din  $D$  ducem  $DQ \perp VB$  ( $Q \in BV$ ). Demonstrați că  $PQBA$  este un patrulater inscriptibil.

22. Dacă există o sferă tangentă la toate muchiile unui tetraedru, atunci suma oricăror două muchii opuse ale tetraedrului este aceeași. (Prin muchii opuse înțelegem două muchii care n-au nici un vîrf comun.)

23\*. Fie  $A, B, C, D$  patru puncte necoplanare. Fie  $M$  și  $N$  două puncte variabile astfel încît  $MA \perp AN$ ,  $MB \perp BN$ ,  $MC \perp NC$ ,  $MD \perp ND$ . Să se arate că segmentul  $MN$  are lungime constantă.

## PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Se dau cinci puncte, din care, nu există trei coliniare și nici patru coplanare. Câte plane, care să conțină trei dintre ele, se pot duce?

2. Folosind  $P_3$ , demonstrați că există în spațiu drepte care nu sînt nici paralele nici concurente.

3\*. Se dau dreapta  $d$ , planul  $\alpha$  ( $d \not\subset \alpha$ ), punctele  $A$  și  $B$ , care nu sînt situate nici în plan, nici pe dreapta. Să se determine punctele  $D \in d$  și  $C \in \alpha$ , astfel încît  $ACBD$  (cu vîrfurile în această ordine) să fie paralelogram. Discuție.

4\*. Fie  $a, b, c, d$ , patru drepte oarecare în spațiu. Să se construiască un trapez, avînd cîte un vîrf al unei baze pe  $a, b$  și cîte un vîrf al celeilalte baze pe  $c, d$ . Să se efectueze construcția:

- a) vîrfurile pe  $a, b$  sînt date;
- b) vîrfurile pe  $a, c$  sînt date.

5. Formulați și demonstrați o reciprocă a teoremei lui Desargues.

6\*. Fie  $ABC$  un triunghi,  $O$  un punct în planul său  $\alpha$ ,  $D$  un punct pe perpendiculara în  $O$  pe planul  $\alpha$ . Să se arate că  $AD \perp BC$ , dacă și numai dacă,  $O$  se află pe înălțimea din  $A$  a triunghiului  $ABC$ .

7\*. Dreptele  $d_1$  și  $d_2$ , perpendiculare și concurente în  $A$ , intersectează planul  $\alpha$  în două puncte diferite. Unghiurile dintre aceste două drepte și planul  $\alpha$  au măsurile de  $30^\circ$  și respectiv  $45^\circ$ . Să se calculeze măsura unghiului dintre planul  $\alpha$  și planul determinat de  $d_1$  și  $d_2$ . (Distanța de la  $A$  la planul  $\alpha$  este egală cu  $\alpha$ .)

8\*. Fie  $A, B, C, D$ , patru puncte necoplanare. Printr-un punct  $M$  de pe segmentul  $AB$  se duce un plan paralel cu  $AC$  și  $BD$ . Acest plan intersectează pe  $BC$  în  $Q$ , pe  $CD$  în  $P$  și pe  $AD$  în  $N$ .

- a) Să se arate că patrulaterul  $MNPQ$  este paralelogram.
- b) În cazul  $AM = x$  cm,  $AB = 5$  cm,  $AC = 12$  cm și  $BD = 7$  cm, să se calculeze, în funcție de  $x$ , perimetrul patrulaterului  $MNPQ$ .

9. Se dă triunghiul dreptunghic  $ABC$  ale cărui catete sînt  $AB = 2\sqrt{2}$  și  $AC = \sqrt{3}$ . Pe planul triunghiului se ridică, de aceeași parte, perpendicularele  $AA' = 8$ ,  $BB' = 4$ ,  $CC' = 2$ . Fie  $A_1, B_1, C_1$  mijloacele segmentelor  $AA', BB'$  și respectiv  $CC'$ .

- a) Să se arate că triunghiul  $A'B'C'$  este dreptunghic.
- b) Să se arate că triunghiul  $A_1B_1C_1$  este echilateral.

(Probe de verificarea cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, Jud Prahova — 1975).

10. Fie  $M$  la distanța  $MA = 3$  cm de un plan  $\alpha$  și la distanța  $MB = 8$  cm de un alt plan  $\beta$ , paralel cu primul. Fie  $BC$  un segment de dreaptă de lungime egală cu 6 cm, situat în planul  $\beta$ . Dreapta  $MC$  intersectează planul  $\alpha$  în  $D$ . Să se afle perimetrul triunghiului  $MAD$ .

11. Se dă un cub  $ABCD A' B' C' D'$  de muchie  $a$ .

a) Să se calculeze distanțele de la punctele  $A$ ,  $C$ ,  $B'$  la diagonala  $BD'$ .

b) Să se arate că segmentele ale căror măsurile am calculat la pct. a) sînt concurente într-un punct  $T$ .

c) Să se arate că  $\frac{BT}{TD'} = \frac{1}{2}$ .

d) Să se afle unghiul dintre  $AB'$  și  $AC$ .

(G.M. nr. 4/1975)

12. În vîrfurile  $C$  al dreptunghiului  $ABCD$ , cu dimensiunile  $AB = a\sqrt{3}$  și  $BC = a$ , se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului, pe care se ia un punct  $M$  astfel încît  $\angle MAC = 30^\circ$ .

a) Să se calculeze volumul prismei care are o bază dreptunghiul  $ABCD$  și înălțimea  $CM$ .

b) Prisma de mai sus se intersectează cu un plan ce trece prin punctele  $B$  și  $D$ . Să se calculeze aria acestei secțiuni.

c) În centrul  $O$  al dreptunghiului  $ABCD$ , se ridică perpendiculara pe planul său care întâlnește pe  $AM$  în  $E$ . Este triunghiul  $BEM$  dreptunghi?

(Concurs, faza locală, Ploiești, 1976, prof. N. Iordă)

13. Un cub  $g$  l, din tablă groasă de 5 mm, are muchia în interior de 40 cm. Să se afle masa corpului știind că densitatea tablei este de  $7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

14. Pe planul triunghiului dreptunghiuc  $ABC$  ( $AB = AC$ ,  $\angle A = 90^\circ$ ) se duce perpendiculara  $MC = a$ .

a) Să se arate că  $MA = MB$ .

b) Ducem prin  $M$  o dreaptă paralelă cu  $CB$ . Pe  $AD$  un punct pe această dreaptă astfel încît proiecția lui  $D$  pe planul triunghiului  $ABC$  să coincidă cu mijlocul segmentului  $CB$ . Să se arate că triunghiul  $ABD$  este isoscel.

15. O prismă oblică are ca bază un triunghi echilateral  $ABC$ , cu  $AB = 4 \text{ m}$ . Fața  $ABB'C'$  este un romb cu un unghi de  $60^\circ$  și este perpendiculară pe planul bazei. Se cere:

a) Volumul prismei, b) aria laterală a prismei.

(Concurs, etapa locală, Sibiu 1970)

16. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are înălțimea de 6 cm, latura bazei mari egală cu  $\frac{4}{3}$  din înălțime și latura bazei mici egală cu  $\frac{5}{8}$  din latura bazei mari. Se cere:

a) Volumul trunchiului de piramidă;

b) volumul piramidei din care provine trunchiul;

c) arile laterale ale trunchiului de piramidă și piramidei.

(Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — Jud. Olt, 1978.)

17. Secțiunea axială a unui con circular drept este un triunghi isoscel al cărui perimetru este de 18 cm, iar lungimea segmentului care unește mijloacele laturilor congruente ale triunghiului este de 4 cm. În con se face o secțiune, printr-un plan paralel cu baza, situat față de vîrf la  $\frac{2}{3}$  din înălțimea conului. Se cere:

a) Să se calculeze aria laterală și aria totală a conului inițial;

b) să se arate că volumul conului inițial este de  $16\pi \text{ cm}^3$ ;

c) să se calculeze aria laterală și volumul trunchiului de con obținut;

d) să se calculeze aria și volumul sferei înscrise în conul inițial.

(Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — Jud. Caraș Severin.)

18. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza bazei mari de 15 cm și înălțimea de 24 cm.

- Să se determine volumul și aria totală a trunchiului de con
  - Să se calculeze volumul conului din care provine trunchiul de con
  - Să se calculeze raza sferei circumscrise conului din care provine trunchiul de con
- (Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — București, 1978)

19. Se dă o prismă patrulateră regulată dreaptă,  $AB C D A' B' C' D'$ . Latura bazei este de 2 dm, iar diagonala  $AC'$  a prismei este de 4 dm

- Să se arate că triunghiul  $ACC'$  este isoscel.
- Să se calculeze aria totală a prismei cu vârful în  $C'$  și baza  $ABCD$
- Presupunând că prismă este metalică și că prin topire se transformă în altă a cărei bază este un dreptunghi cu lungimea de 2 dm și lățimea de  $\sqrt{2}$  dm, să se arate că înălțimea acestei prismă este egală cu diagonala prismei inițiale

(Concurs, faza locală, jud. Prahova, 1972)

20. Într-un cerc de rază  $R$  se înscrie un triunghi dreptunghic  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ), arcele  $AC$  și  $AB$  fiind invers proporționale cu numerele 1, (3) și 6, (6). Pe perpendiculara ridicată în  $A$  pe planul triunghiului  $ABC$  se ia un segment  $AV = \frac{3R}{2}$ . Să se afle:

- măsura arcelor  $AC$  și  $AB$ ;
  - aria triunghiului  $VBC$ ;
  - unghiul plan al diedrului format de planele  $(VBC)$  și  $(ABC)$
- (Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, jud. Prahova, 1978)

21. Fie  $ABCD$  un romb de latură egală cu  $a$  și unghiul  $A = 60^\circ$ . În punctul  $A$  se ridică perpendiculara  $d$  pe planul  $(ABC)$ , pe care se ia un segment  $AM = \frac{3a}{2}$ . Să se afle:

- volumul prismei drepte care are ca bază rombul  $ABCD$  și înălțimea egală cu  $AM$ ,
- ce poți spune despre unghiul format de  $(ABC)$  și  $(BMD)$ , enunțând propoziția pe care ai aplicat-o;
- unghiul plan al diedrului format de  $(ABC)$  și  $(BMD)$ ,
- distanța de la punctul  $M$  la dreapta  $BC$ ;
- volumul piramidei cu vârful în  $B$  și baza  $AMD$

22. O prismă dreaptă are ca bază un trapez dreptunghic  $ABCD$ , ( $\angle A = \angle D = 90^\circ$ ) și diagonala  $BD$  perpendiculară pe latura  $BC$  ( $BC = 10$  cm). Linia mijlocie a trapezului  $MT$  întâlnește diagonalele  $BD$  și  $AC$  în  $P$  și  $Q$  (cunoscând că  $PQ = 4$  cm și că înălțimea prismei este de 10 cm, să se calculeze: a) aria laterală și volumul prismei, b) lungimea diagonalei  $BD$ .

(G.M. nr. 5/1977)

23\*. Se dă paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ . Să se arate că dacă perpendicularele din  $B$ ,  $D$  și  $A'$  pe diagonala  $AC'$  sînt concurente într-un punct  $M$ , aparținînd acestor diagonale, atunci paralelipipedul este cub

24. Pe latura  $OX$  a unghiului  $XOY = 60^\circ$  se ia punctul  $A$  astfel încît  $OA = a$ , din care se duce perpendiculara pe  $OY$  și care taie pe  $OY$  în  $B$ . Din  $B$  se duce perpendiculara  $d$  pe planul unghiului dat și se ia pe ea  $BM = OA$ . Fie  $BE$  perpendiculara pe  $AM$  ( $E \in AM$ ),  $AC$  perpendiculara pe  $OB$  ( $C \in OB$ ) și  $CD$  perpendiculara pe  $AM$  ( $D \in AM$ ).

- Să se determine unghiurile triunghiului  $ABM$  și lungimea înălțimii  $BE$ .
- Să se afle raportul  $\frac{AD}{DE}$ .
- Să se calculeze perimetrul triunghiului  $OAM$ .

(Concurs faza locală, Tîrgoviște, N. Bebea)

25. Să se calculeze volumul prisme patrulateră regulate  $ABCD A' B' C' D'$  cu latura bazei  $AB = a$  și unghiul dintre  $MD$  și  $NC'$  de  $60^\circ$  ( $M$  și  $N$  sînt mijloacele muchiilor laterale  $AA'$  și  $DD'$ ).

(Concurs etapa locală, București, 1978 - C. Cărbunaru)

26. Se consideră un paralelipiped dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$ , cu laturile bazei  $AB = a$  și  $BC = b$ . Să se demonstreze că dacă înălțimea paralelipipedului este  $AA' = \sqrt{2ab}$ , diagonala paralelipipedului este egală cu suma a două laturi alăturate bazei.

27. Se dă piramida triunghiulară  $VABC$  astfel încît:  $AV = BV = CV$ ,  $AV = a$ ,  $\angle AVB = 60^\circ$ ,  $\angle AVC = 90^\circ$ ,  $\angle BVC = 120^\circ$ .

a) Să se calculeze laturile triunghiului  $ABC$ .

b) Să se calculeze aria laterală a piramidei cu vîrfurile  $V$  și baza  $ABC$ .

28. Într-un tetraedru regulat  $SABC$  de muchie  $a$ , se face o secțiune printr-un plan ce trece prin punctele  $A$ ,  $P$ ,  $Q$  ( $P$  și  $Q$  sînt situate pe  $SC$  și respectiv  $SB$ , astfel încît  $SP = 2PC$  și  $SQ = 2QB$ ).

a) Să se afle aria secțiunii.

b) Să se afle volumul piramidei cu baza  $PAQ$  și cu vîrfurile în  $S$ .

(Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu, Constanța, 1976.)

29. Se dă trapezul  $ABCD$  în care  $AD \parallel BC$  și  $AB = AD = DC$ ,  $AB = a$  și  $BC = 2a$ . Diagonalele  $AC$  și  $BD$  se intersectează în  $O$ . În  $O$  se ridică perpendiculara pe planul trapezului, pe care se ia un punct  $S$  astfel ca  $SO = \frac{a}{2}$ .

a) Să se arate că unghiurile ascuțite ale trapezului au fiecare cîte  $60^\circ$  și că  $AC$  este perpendiculară pe  $AB$ , iar  $BD$  este perpendiculară pe  $DC$ .

b) Să se arate că triunghiul  $SAB$  este dreptunghic.

c) Să se determine unghiul diedru format de planul  $(SAD)$  cu planul trapezului.

d) Prin mijlocul segmentului  $SO$  se duce un plan paralel cu planul trapezului, care întîlnește segmentele  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  respectiv în  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ .

Fie  $U$  și  $v$  volumele piramidelor care au vîrfurile  $S$  și ca baze poligoanele  $ABCD$  și respectiv  $A_1 B_1 C_1 D_1$ . Să se arate că  $U = 8v$ .

(Concurs, faza locală, Prahova, 1970)

30. Volumul unui trunchi de piramidă regulată cu baze pătrate este de șapte ori mai mare decît volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 dm, lățimea de 40 cm și înălțimea de 0,3 m; înălțimea trunchiului de piramidă este de 4 dm, iar latura bazei mici este de 2,25 ori mai mare decît această înălțime.

Se cere:

a) volumul trunchiului de piramidă;

b) latura bazei mari;

c) aria laterală a trunchiului;

d) la ce distanță de planul bazei mari trebuie făcută o secțiune paralelă cu bazele, astfel încît aria acestei secțiuni să fie egală cu  $144 \text{ dm}^2$ .

(Concurs pentru admiterea în clasa a IX-a, 1971)

31. Un trapez dreptunghic are baza mare egală cu 16 cm, înălțimea de 30 mm și baza mică egală cu 0,75 din baza mare. Să se afle:

a) perimetrul și aria trapezului;

b) aria totală și volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mici.



82. O dreaptă perpendiculară pe ipotenuza  $BC$  a unui triunghi dreptunghic  $ABC$  intersectează catetele  $AB$  și  $AC$  în  $S$ , respectiv în  $T$ .

a) Să se arate că  $CS \perp BT$ .

b) Dacă  $AB = 5$  cm și  $AC = 12$  cm, să se afle volumul corpului obținut prin rotirea triunghiului  $ABC$  în jurul ipotenuzei  $BC$ .

83. Într-un trapez isoscel  $ABCD$ , un unghi ascuțit este de  $45^\circ$ . Latura oblică  $AD$  este congruentă cu baza mică  $CD$  ( $AD = 10$  cm).

a) Să se afle lungimea diagonalei  $BD$ .

b) Să se afle volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei mari.

84. Un trapez isoscel  $ABCD$  are baza mare  $AB = 10$  cm, baza mică  $CD$  și laturile neparalele sînt egale, fiecare, cu cîte 5 cm. Se cere:

a) să se afle unghiurile trapezului;

b) să se demonstreze că  $AD \perp BD$ ;

c) să se afle volumul corpului obținut prin rotirea trapezului în jurul dreptei ce trece prin mijloacele bazelor.

85. Se consideră un trapez cu ambele unghiuri de la baza mare ascuțite.

a) Rotim trapezul în jurul bazei mici.

b) Rotim trapezul în jurul bazei mari.

Cînd este mai mare volumul obținut în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?  
(Concurs, 1978 — I.C. Ligor)

86\*. Dintr-o piesă uzată, în formă de con circular drept, cu raza bazei de 2 dm și înălțimea  $2\sqrt{2}$  dm, se taie un corp în formă de cub, cu una din fețe așezată pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se folosește mai puțin de un sfert din material.

(Concurs elevi, 1978)

87. Triunghiul  $AB'C'$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB' = AC'$ ) se proiectează pe un plan care conține înălțimea lui,  $AD$ , după triunghiul echilateral  $ABC$ . Să se găsească valoarea unei funcții trigonometrice a unghiului pe care îl fac fiecare dintre dreptele  $AB'$  și  $AC'$  cu planul triunghiului  $ABC$ .

88. Un triunghi  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , se proiectează pe un plan  $\alpha$  care conține vîrfurile  $B$  ( $A, C$  sînt de aceeași parte a planului).

Proiecția triunghiului  $ABC$  este triunghiul  $A'BC'$ . Știind că  $AA' = CC'$  și că distanța dintre  $A$  și  $C$  este  $a$ , că unghiurile dreptelor  $CB$  și  $BA$  cu  $\alpha$  sînt respectiv de  $30^\circ$  și  $45^\circ$ , să se determine, în funcție de  $a$ , segmentele  $BA'$ ,  $BC'$  și  $CC'$ .

89. Fie  $OX, OY, OZ$  trei semidrepte în spațiu, astfel că măsura unghiului format de oricare pereche dintre ele este de  $60^\circ$ .

a) Să se demonstreze că una dintre aceste semidrepte se proiectează pe planul determinat de celelalte două după bisectoarele lor.

b) Fie punctul  $A$  pe  $OZ$ , situat la distanța  $a$  de  $O$  și fie  $A'$  proiecția lui  $A$  pe planul  $XOY$ . Să se calculeze distanța  $AA'$ .

40. Se consideră un con circular drept cu raza bazei  $R$  și înălțimea  $VO = 2R$ ,  $V$  fiind vîrfurile conului și  $O$  centrul cercului de bază. Să se calculeze raza cercului de intersecție a conului cu semisfera avînd drept cerc mare baza conului.

41\*. O găleată în formă de trunchi de con, din tablă, are dimensiunile  $r = 10$  cm,  $R = 25$  cm,  $G = 30$  cm. Câtă tablă a fost necesară pentru confecționarea ei. (Se consumă la îmbinări 8% din suprafața tablei folosite.) Ce capacitate are?

Câte grade are sectorul de cerc care cuprinde porțiunea de coroană circulară din desfășurarea suprafeței laterale a trunchiului de con?  
(Probe de verificare a cunoștințelor pentru înscrierea în treapta I de liceu — jud. Vaslui.)

42. Un trunchi de con circular drept, ale cărui generatoare fac cu planul bazei unghiuri de  $45^\circ$ , este circumscris unei sfere cu raza de 3 cm. Să se calculeze razele bazelor și aria laterală a trunchiului de con.

43. Într-o sferă de rază  $R = 5$  cm se înscrie un cilindru circular drept de înălțime 6 cm. Se cere:

- aria calotei sferice aflate deasupra bazei cilindrului;
- aria laterală și volumul cilindrului.

44. În triunghiul  $ABC$  cunoaștem  $BC = 4$  cm, înălțimea  $AH = \sqrt{3}$  cm și unghiul  $B = 30^\circ$ . O paralelă la latura  $BC$  intersectează pe  $AB$  și  $AC$  respectiv în punctele  $D$  și  $E$ , iar  $DE$  intersectează pe  $AH$  în  $I$ .

- Să se calculeze lungimile segmentelor  $AB$ ,  $AC$  și  $BH$ .
- Dacă  $HI = \frac{\sqrt{3}}{3}$  cm, să se calculeze lungimile segmentelor  $BD$ ,  $DE$  și  $EC$ .
- Să se calculeze aria totală a corpului obținut prin rotirea trapezului  $BDEC$ , în jurul lui  $BC$ .

45\*. Se dau două cercuri de raze  $a$  și  $b$  situate pe o sferă de rază  $R$ , tangente exterioare. Se cere distanța dintre centrele lor.

46\*. Fiind dat un con circular drept cu înălțimea  $h$  și raza bazei  $r$ , să se determine poziția unui punct  $P$ , care este situat la aceeași distanță de vârful conului și punctele de pe cercul bazei.

47. Un pătrat de latură 4 cm se proiectează pe un plan care face cu planul pătratului un unghi de  $60^\circ$ .

- Să se afle aria proiecției.
- Să se demonstreze că, în general, proiecția pătratului este un paralelogram. Când este un dreptunghi? Când este un romb?

## INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

### PROBLEME 1 (pagina 9)

1. a) Toate patru nu pot fi coliniare. Dacă ar fi coliniare, ar fi situate într-un același plan, b) Vom uni, pe rând, pe  $A$  cu  $B$ , cu  $C$  și cu  $D$ . Pe  $B$  îl vom uni numai cu  $C$  și cu  $D$ , căci cu  $A$  l-am unit. Apoi vom uni pe  $C$  cu  $D$ . Deci obținem  $3 + 2 + 1 = 6$  (drepte).

2. O singură dreaptă. (Dacă  $A, B, C$  sînt coliniare și  $B, C, D$  sînt coliniare, rezultă că  $A, B, C, D$  sînt coliniare.)

3. Să notăm cele trei puncte coliniare cu  $A, B, C$ . a) Toate planele conțin pe  $D$  și cel puțin două din punctele  $A, B, C$ . Deci, există un singur plan, b) O infinitate de plane. (Toate planele care trec prin dreapta  $AB$ .)

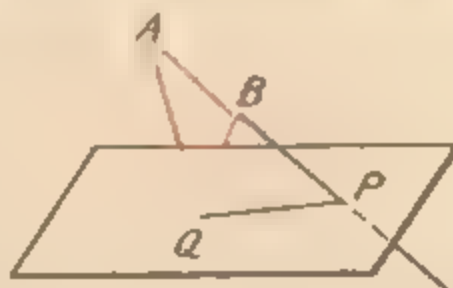
4. Se folosește propoziția  $P_4$ .

5. a) Un singur plan, în situația cînd  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  sînt coliniare. Spre exemplu, planul determinat de  $M_7$  cu  $M_1$  și  $M_2$ , conține și toate celelalte puncte, b) Cel mai mare număr de plane se obține cînd oricare trei dintre cele șase puncte din plan sînt necoliniare. (15 plane); c) Nu.

6. a) Șapte drepte, în cazul în care toate cele șase puncte din planul dat sînt coliniare; b) În cazul în care oricare trei puncte, dintre cele șase din planul dat, nu sînt coliniare, se obțin dreptele  $M_7M_1, M_7M_2, \dots, M_7M_6$  (șase drepte) și încă 15 drepte determinate în planul dat. Deci, în total, 21 de drepte.

7. Pe dreapta  $AB$  avem  $PA = PB = AB$ . În triunghiul  $AQB$  avem:  
 $AB > |QA - QB|$  (fig. R.1)

Fig. R.1



8. Dacă  $A \in d$  și  $B \in g$ , dreapta  $AB$  este situată în planul determinat de  $d$  și  $g$ .

9. În general nu. Priviți figura R. 2.

Fig. R. 2



10. Planul determinat de dreptele  $d$  și  $g$ .

11. Planul determinat de  $A$  și  $d$ , mai puțin semidreptele ce trec prin  $A$  și sînt paralele cu  $d$ . (Punctul  $A$  aparține locului geometric.)

### PROBLEME 2 (pagina 16)

1. Două drepte paralele cu a treia sînt paralele între ele. (Tranzitivitatea relației de paralelism.)

2.  $DE = 8$  cm.

3. Nu. Puteți da un exemplu.

4. Presupunem că  $\alpha$  nu ar fi paralel cu  $\beta$ , deci  $\alpha \cap \beta = c$ . Atunci  $a \parallel c$  și  $b \parallel c$ , deci  $a \parallel b$ , ceea ce contrazice ipoteza, deci  $\alpha \parallel \beta$ .

5. Șase drepte.

6. Fie  $a$  o dreaptă din planul  $\alpha$ , despre care presupunem că nu ar fi paralelă cu  $\beta$  ( $\alpha \cap \beta = \{M\}$ ). Ar rezulta că  $M \in a$  și  $M \in \beta$ , deci că  $\alpha$  și  $\beta$  nu ar fi paralele, deci  $a \parallel \beta$ .

7. Dacă orice dreaptă conținută în planul  $\alpha$  este paralelă cu planul  $\beta$ , atunci  $\alpha \parallel \beta$ . Reciproca este adevărată.

8. Nu. Se consideră  $\alpha$  și  $\beta$  două plane și  $\alpha \cap \beta = a$ . Fie  $d$  o dreaptă ( $d \parallel a$ ) și  $d \not\subset \alpha$ ,  $d \not\subset \beta$ ,  $\alpha \parallel d$ ,  $\beta \parallel d \nRightarrow \alpha \parallel \beta$ .

9. Nu. Fie  $\alpha$  și  $\beta$  cele două plane paralele și  $d \subset \beta$ . Printr-un punct  $A \in \alpha$  trece o singură paralelă ( $g$ ) conținută în  $\alpha$  și paralelă la  $d$ . Ducem prin  $A$ , tot în  $\alpha$ , o dreaptă  $h$ , diferită de  $g$ . Dreptele  $d$  și  $h$  nu sînt paralele.

10. a)  $MN$  este paralelă cu planul  $\alpha$ ; b)  $MN$  înțepă planul  $\alpha$ .

11. Fie  $ABC$  un triunghi și  $\alpha$  un plan ( $\alpha \parallel AB$  și  $\alpha \perp AC$ )  $\Rightarrow \alpha \parallel (ABC)$ ,  $BC \subset (ABC) \Rightarrow \Rightarrow \alpha \parallel BC$ .

12.  $AB \parallel g$ .

### PROBLEME 3 (pagina 20)

1. Nu. Priviți figura R. 3.

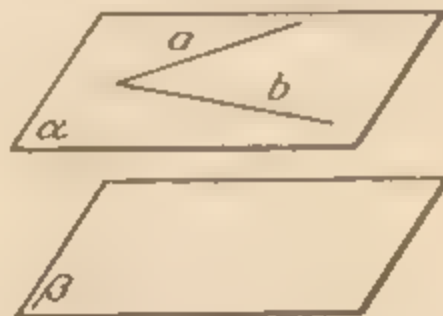


Fig. R.3

2. Punctul  $C$  și dreapta  $a$  determină un plan  $\alpha$ , iar punctul  $C$  și dreapta  $b$  determină un alt plan  $\beta$ . Planele  $\alpha$  și  $\beta$ , avînd un punct comun ( $C$ ), conform lui  $P_2$ , mai au încă unul, deci se intersectează după o dreaptă  $d$ . Aceasta este dreapta căutată (fig. R. 4).

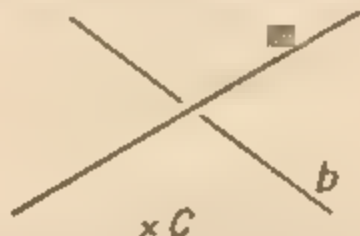


Fig. R.4

3. Presupunem că dreapta  $d$  are un punct comun cu planul  $\alpha$ , atunci ea este toată conținută în planul  $\alpha$ , pentru că este paralelă cu  $g$ , și  $g$  este paralelă cu  $\alpha$ . Dacă nu are un punct comun cu  $\alpha$  este, evident, paralelă cu  $\alpha$ .

4. Să presupunem că  $\alpha \parallel BD$  (fig. R 5). Deoarece  $BD \parallel \alpha$ , planul  $(ABD)$  va tăia pe  $\alpha$  după o dreaptă paralelă cu  $BD$ . Deci  $MQ \parallel BD$ . În mod asemănător se demonstrează că  $NP \parallel BD$ . Rezultă că  $MQ \parallel NP$  și deci că  $MNPQ$  este un trapez.

5. Segmentul  $AB$  aparține planului determinat de dreptele  $a$  și  $b$ . Problema s-a redus la o problemă de geometrie în plan (Locul geometric al mijlocului unui segment ce se sprijină pe două drepte paralele.)

6. Dacă  $\gamma \parallel a$ .

7. Fie  $A$  un punct oarecare al dreptei  $d$ . Punctul  $A$  și dreapta  $g$  determină un plan  $\beta$ . Prin  $A$  ducem în planul  $\beta$  paralela la  $g$ , pe care o notăm cu  $g'$ . Dreptele  $g'$  și  $d$  determină un plan paralel cu  $g$ . Cu aceasta am demonstrat existența. Unicitatea se demonstrează prin metoda reducerii la absurd.

8. „Dacă un plan  $\alpha$  taie două plane  $\beta$  și  $\gamma$  după două drepte paralele, atunci  $\beta$  și  $\gamma$  sînt paralele” este o afirmație falsă. Planele  $\beta$  și  $\gamma$  se pot întîlni după o dreaptă paralelă cu  $\alpha$ ...

9.  $(ABD) \parallel (MNP)$ .

10. Din triunghiurile  $ABC$  și  $ABD$  (fig. R 6) rezultă că  $EF \parallel AB$  și  $HG \parallel AB \Rightarrow EF \parallel HG$ , iar din triunghiurile  $ACD$  și  $BCD$ :  $EH \parallel CD$  și  $FG \parallel CD \Rightarrow EH \parallel FG$ . Deci  $EFGH$  este paralelogram.

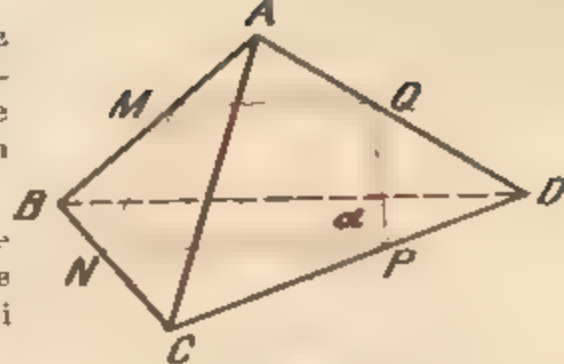


Fig. R 5

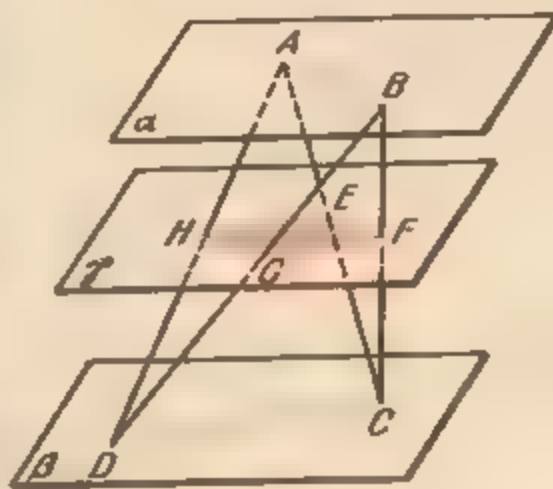


Fig. R.6

11. a)  $MN \parallel AC$  și  $MN = \frac{1}{2} \cdot AC$ ,  $PQ \parallel AC$

și  $PQ = \frac{1}{2} \cdot AC$ . Rezultă deci că  $MNPQ$  este paralelogram. În mod analog, folosind teorema liniei mijlocii în triunghi, se arată și despre celelalte patrulatere de la pct. b) și c) că sînt paralelograme. d) Paralelogramele  $MNPQ$  și  $MRPS$  au diagonala  $MP$  comună. Deci  $RS$  trece prin mijlocul lui  $MP$ . Analog,  $MRPS$  și  $NRQS$  au diagonala  $RS$  comună, deci  $NQ$  trece prin mijlocul lui  $RS$ . Cum  $MP$ ,  $NQ$  și  $RS$  au mijloacele în același punct, rezultă că sînt concurente.

$$\left. \begin{array}{l} 12. \text{ } MN \text{ este linie mijlocie în triunghiul } ABC: MN = \frac{AC}{2} \\ PQ \text{ este linie mijlocie în triunghiul } DAC: PQ = \frac{AC}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow MN = PQ.$$

Analog se demonstrează că  $MQ \parallel NP$  și  $MQ = NP$ .

13. Nu neapărat. Pot fi ambele paralele cu două drepte paralele. Ele se pot intersecta după o dreaptă paralelă cu dreptele. Dacă adăugăm condiția ca dreptele inițiale să nu fie paralele, afirmația devine adevărată.

14. Din enunț rezultă că  $d \parallel a$  și  $d \parallel b$ . Locul geometric este planul determinat de  $d$  și  $c$ , deci planul care conține pe  $c$  și este paralel cu  $a$  și cu  $b$ .



#### PROBLEME 4 (pagina 23)

1.  $AB = 7,5$  cm,  $BC = 4,5$  cm.
2. Oricare dintre plane conține paralela prin  $A$  la  $d$ .
3. Fie  $\{B\} \in \alpha$  și  $M$  mijlocul lui  $AB$ . Locul geometric este planul ce conține pe  $M$  și este paralel cu  $\alpha$ .
4. Soluția este similară cu cea a problemei precedente.
5. a) O dreaptă paralelă cu  $d$  și  $g$ . b) Un plan paralel cu  $d$  și  $g$ .
6. a) Linia mijlocie a trapezului  $APQR$ . b) Un paralelogram și interiorul său.
7. Dacă  $d_1, d_2, d_3, d_4$  sînt cele patru drepte și  $A, B, C, D$ , respectiv  $A', B', C', D'$  sînt punctele în care ele intersectează două plane carecare  $\alpha$  și  $\beta$ , iar  $BC'$  este paralel și congruent cu  $AD$ , atunci planele  $\{BCB'\}$  și  $\{ADA'\}$  sînt paralele. Presupunem că  $B'C'$  nu este paralelă cu  $A'D'$ , atunci  $B'C' \cap A'D' = \{M\} \Rightarrow \{M\} \in \{BCB'\}$  și  $\{M\} \in \{ADA'\} \Rightarrow \{M\} \in \{BCB'\} \cap \{ADA'\}$ , ceea ce contrazice concluzia de mai sus.
8. Două drepte concurente determină un plan. Acest plan este intersectat de două plane, după două drepte paralele. Deci patrulaterul inscripșil  $ABCD$  are două laturi paralele. El este deci dreptunghi sau trapez isoscel.
9. Nu, vezi problema precedentă.
10. a) Se formează triunghiuri ale căror unghiuri au laturile respectiv paralele b, și c) Se va folosi raportul de asemănare al triunghiurilor.
11. Dacă  $A', A'' \in \alpha$ ,  $B', B'' \in \beta$ , iar  $C'$  și  $C''$  satisfac relațiile  $\frac{A'C'}{C'B'} = 1$ ,  $\frac{A''C''}{C''B''} = 1$ , atunci locul geometric este planul  $\{C'C''\}$  paralel cu  $\alpha$ .
12. Dacă  $R$  este punctul în care  $d$  intersectează planul  $\alpha$ , atunci

$$\frac{AM}{MB} + \frac{RN}{NC} + \frac{CP}{PD} + \frac{DQ}{QA} = \frac{AR}{RB'} + \frac{B'R}{RC'} + \frac{C'R}{RD'} + \frac{D'R}{RA'} = 1$$

#### PROBLEME 5 (pagina 28)

1. Dacă dreptele  $a, b, c$ , sînt toate trei coplanare, perpendicularele  $OA, OB$  și  $OC$  se găsesc în planul perpendicular pe planul determinat de  $a, b, c$  și care conține pe  $O$ . Dacă  $a, b, c$  sînt necoplanare și planul  $\{OAB\}$  ar fi diferit de  $\{OBC\}$ , ar rezulta că prin punctul  $O$  s-ar duce două plane perpendiculare pe  $b$ , ceea ce este imposibil. Deci dreptele  $OA, OB$  și  $OC$  sînt coplanare numai dacă dreptele  $a, b, c$  sînt toate trei coplanare.
2. Punctul  $O$  este mijlocul lui  $AB$ . 3. Răspunsul este afirmativ.
4.  $OB \perp g$ .
5.  $AB \perp (ACN)$ .
6. Planul perpendicular în  $O$  (mijlocul lui  $AB$ ), pe  $AB$ .
7. Dacă  $A, B$  și  $C$  sînt cele trei puncte necoliniare, locul geometric căutat este dreapta de intersecție a planelor mediatoare ale segmentelor  $AB$  și  $BC$  (prin care trece și planul mediator al segmentului  $CA$ ).
8. Punctul de intersecție al dreptei  $d$  determinate la problema precedentă cu planul mediator al segmentului  $CD$ . (Am considerat cele patru puncte necoplanare  $A, B, C, D$ .)
9. Din triunghiurile dreptunghice  $A'AC$  și  $B'BC$  rezultă că  $AC = 7$  cm,  $BC = 7$  cm, deci  $AB = BC = CA$ .
10. Din triunghiul dreptunghic  $B'BC$  rezultă că  $BC = a$ , deci  $AB \equiv AC \equiv BC$ .
11. Cateta  $AC$ , rămînînd perpendiculară pe  $AB$ , este conșinută în planul perpendicular în  $A$  pe  $AB$ . Locul geometric este un cerc de centru  $A$  și rază  $AC$ , situat în planul menționat mai sus.

12. Prin  $A'$  ducem paralela la  $AB$ , care intersectează pe  $BB'$  în  $H''$ . În mod analog, prin  $A'$  se duce paralela la  $AC$ , care taie pe  $CC'$  în punctul  $C''$  etc. Din triunghiul  $A'B''B$ ,  $A'B' = 5$ , în mod analog se găsește  $A'C' = 7$ ,  $A'D' = 10$ ,  $B'C' = 2\sqrt{5}$ ,  $B'D = \sqrt{57}$  și  $C'D' = \sqrt{41}$ .

13. a)  $AA' \perp OA \Rightarrow OA = 12$  m, b) Un cerc cu centrul în punctul  $O'$ , situat pe perpendiculară în  $O$  pe planul cercului dat și având raza de 6 m. (Locus geometric este conținut într-un plan paralel cu planul cercului dat.)

14.  $AB = 12$  cm,  $BC = 8$  cm.

15. O dreaptă perpendiculară pe planul cercului în punctul  $O$ , centrul său.

16. O dreaptă perpendiculară pe planul pătratului dusă în punctul  $O$  de intersecție a diagonalelor lui.

17. Fie  $\alpha$  planul perpendicular pe  $b$  dus prin  $a$  și care intersectează pe  $b$  în  $A$ . Se duce prin punctul  $A$  dreapta  $c$ , paralelă cu  $a$ . Avem  $b \perp c \Rightarrow b \perp a$ . Deci, cele două drepte date ( $a$  și  $b$ ) trebuie să fie perpendiculare.

18. Fie  $M$  un punct pe  $d_1$ . Prin  $M$  ducem planul  $\alpha$ , care este perpendicular pe  $d_3$ , pe  $M$  ridicăm o perpendiculară  $a$  pe  $\alpha$ . Rezultă că  $a \perp d_3$  și că  $a \perp d_1$ , ceea ce înseamnă că  $d_1$  trebuie să se găsească în întregime, în planul  $\alpha$ , care este planul căutat.

19. Dacă  $d_1$  și  $d_2$  sunt perpendiculare, ducem perpendiculara cunoscută  $d_2$  a lui  $d_1$  și  $d_3$  și planul  $(d_1, d_2)$  este cel căutat.

20. Intersecția lui  $\alpha$  cu planul perpendicular pe  $d$  care trece prin  $A$ .

## PROBLEME 6 (pagina 32)

1. Ducem înălțimea  $AD$  a triunghiului  $ABC$ . Avem  $BC \cdot AD = AB \cdot AC \Rightarrow AD = 24$  cm. Știind că  $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp AD$  și  $MD \perp BC$ . Din triunghiul dreptunghic  $MAD$  rezultă că  $MD = 26$  cm.

2. Dacă  $D$  este mijlocul segmentului  $AB$ ,  $OD = 4$  cm, iar  $MD = 5$  cm.

3. Paralela prin  $E$  la  $BC$  taie pe  $AB$  în  $M$  și pe  $CD$  în  $M'$ , iar paralela prin  $E$  la  $AB$  taie pe  $AD$  în  $N$  și pe  $BC$  în  $N'$ ,  $EM = 3 \cdot \frac{1}{3}$  cm = 1 cm,  $EN = 9 \cdot \frac{1}{3}$  cm = 3 cm;

$FM = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$  (cm),  $FN = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$  (cm),  $FM' = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$  (cm),  $FN' = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$  (cm).

4. Fie  $ABCD E F$  hexagonal dat. Vom observa că distanțele lui  $M$  la  $EF$ ,  $ED$  și respectiv  $BC$  și  $DC$  sunt egale. Deci, vom calcula numai distanțele lui  $M$  la  $BC$  și  $DC$ . Fie  $P$

picioarul perpendicularei din  $M$  pe  $BC$ .  $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $MP = \sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$ . Se observă că  $AC \perp CD$ , și deci,  $MC = \sqrt{b^2 + 3a^2}$  (evident distanța lui  $M$  la  $AB$  și  $AF$  este  $b$ ).

5. Hexagonul are 9 diagonale. Nu vom mai calcula distanțele lui  $M$  la cele trei diagonale care pornesc din  $A$ . De asemenea, vom observa că distanțele lui  $M$  la  $BE$  și  $BD$  sunt respectiv egale cu cele la  $FC$  și  $FD$ . Vom calcula distanțele  $d_1, d_2, d_3, d_4$  ale lui  $M$  la  $BF, BE, BD$  și  $EC$ , găsim:  $d_1 = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}$ ,  $d_2 = \frac{\sqrt{3a^2 + 4b^2}}{2}$ ;  $d_3 = \sqrt{b^2 + a^2}$ ,  $d_4 = \frac{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}{2}$ .

6. Din triunghiul dreptunghic  $ADM$ ,  $AM = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$ . Din triunghiul, de asemenea, dreptunghiu  $MDC$ ,  $MC = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$ . Deci  $MA = MC$ .

7. Fie  $O$  centrul cercului și  $\alpha$  planul său și tangenta  $NP$ . Avem:  $MO \perp \alpha$  și  $ON \perp NP \Rightarrow MN \perp NP$ .

8. a) Notăm  $AA' = x$ ;  $x$  — va fi soluție a ecuației:

$$2a^2 + a^2 + (a - x)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{3a}{2};$$

b)  $x$  va fi soluție a ecuației:  $a^2 + (a - x)^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$ .

9. Un cerc conținut în planul  $\alpha$  cu diametrul  $AP$ ,  $P$  fiind piciorul perpendicularei din  $B$  pe  $\alpha$ .

10. a) Dacă  $B$  este piciorul perpendicularei din  $A$  pe  $d$ , picioarele perpendicularelor din  $A$  pe planul mobilului conținute în planul perpendicular pe  $d$  în  $B$ , b) Locul geometric este un cerc de rază  $\frac{AB}{2}$  și cu centrul în  $O$ , mijlocul lui  $AB$ , c) Un segment  $AA'$  pentru care  $d$  este mediatoare.

11.  $BC \perp AD$  și  $BC \perp OD \Rightarrow BC$  este perpendiculară pe planul determinat de  $AD$  și  $OD$ , deci pe orice dreaptă din acest plan. În particular,  $BC \perp AO$ , deci  $O$  se află pe înălțimea din  $A$ .

12.  $MA' \perp BC$ ,  $MH \perp (ABC) \Rightarrow HA' \perp BC$ . Cum  $H$  aparține înălțimii din  $A$  rezultă că  $AA' \perp BC$ . Analog pentru  $BB'$ ,  $CC'$ .

13.  $AB \perp \alpha$ ,  $BD \perp d \Rightarrow AD \perp d$  ( $\angle ADH = 90^\circ$ ),  $AB \perp \alpha$ ,  $BG \perp g \Rightarrow AG \perp g$  ( $\angle AGH = 90^\circ$ ).

#### PROBLEME 7 (pagina 39)

1.  $BD = 9$  cm. 2.  $4\sqrt{2}$  cm.

3. Fie  $M$  și  $N$  picioarele perpendicularelor din  $D$  și  $B$  pe  $AC$  (fig. R. 7).  $DB = \sqrt{DM^2 + MB^2} = \sqrt{DM^2 + MN^2 + NB^2} = \frac{\sqrt{887}}{5}$  (cm).

4.  $BC = \sqrt{34}$  cm. 5.  $BD = a\sqrt{3}$ .

6.  $MN = 4$  m. 7. Un plan paralel cu cele două drepte, situat la egală depărtare de acestea.

8. Două plane perpendiculare pe planul celor două drepte, și care conțin bisectoarele unghiurilor formate de aceste drepte.

9. Un plan care conține dreapta de intersecție a planelor date și care se numește „plan bisector”.

10. Două plane bisectoare se taie după o dreaptă. Se va arăta că această dreaptă este conținută și în cel de-al treilea plan bisector.

11. Fie  $OM$  perpendiculara dusă pe planul  $ABC$ . Planul  $COM$  este perpendicular pe  $ABC$ . Dacă  $ON \perp AB$ , conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare,  $MN \perp AB$ .

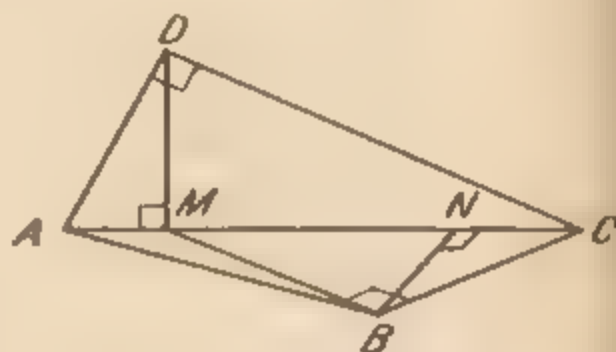


Fig. R.7

12. Se notează cu  $a$  lungimea catetelor triunghiului dreptunghic dat. Se calculează distanța  $BC$ , după îndoire, și se găsește  $BC = a$ . Cum  $AB \equiv AC$ ,  $AB = a$ , rezultă că, după îndoire, triunghiul  $ABC$  este echilateral.

13.  $AP' = PP'$ .

14. Într-un punct  $A \in d \subset \alpha$ , ducem  $a \perp d$ . Planul  $(a, d)$  este cel căutat. Unicitatea. Presupunem existența a două plane care intersectate cu al treilea contrazic unicitatea perpendicularei pe o dreaptă în acest plan.

15. Se folosește definiția planelor perpendiculare.

16. Raționament asemănător cu cel de la construcția perpendicularei dintr-un punct pe un plan.

### PROBLEME 8 (pagina 43)

1. Proiectantele  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sînt paralele și deci determină, pe orice secantă, segmente proporționale.

2. Se aplică rezultatul problemei precedente.

3. Dreptele  $a'$  și  $b'$  sau sînt paralele, sau coincid. Sînt paralele, cînd planul lor este paralel cu planul pe care se face proiecția și coincid, cînd planele sînt perpendiculare.

4. Mediantele lui  $ABC$  se proiectează pe medianele lui  $A'B'C'$ .

5.  $A'B \equiv A'C$ ,  $A'B = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ,  $\widehat{A'BA} = 1$

6.  $AB \equiv AC \equiv A'C'$ ,  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $AA'C'C$  este un dreptunghi  $\Rightarrow CC' = a$

7. Se demonstrează că  $AB \neq AC$ . Dacă  $AB \equiv BC$ ,  $\cos \widehat{ABC} = \frac{16}{25}$  și

$AC = 3\sqrt{2}$  cm. Dacă  $AC \equiv BC$ ,  $\cos \widehat{ABC} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$  și  $AB = 4\sqrt{2}$  cm.

### PROBLEME 9 (pagina 52)

1. a)  $5\sqrt{2}$  cm; b)  $5\sqrt{3}$  cm; c) 5 cm.

2. Se aplică una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

3. a)  $A'D = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ; b)  $\cos \widehat{ACA'} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

4. Se formează două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente.

5. a)  $D'A \perp AB$  (conform uneia dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare),  $C'D' \parallel AB$ , b)  $AB = 5$ ,  $AD' = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $D'C' = 2$ ,  $BC' = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ .

6.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{5}$ .

7. Se va observa că triunghiul  $B'AC$  este dreptunghic isoscel  $AB' = AC' = 3\sqrt{2}$ ,  $\cos \widehat{BAC'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\angle BAC' = 45^\circ$ .

8. 9 cm.

9. a)  $BD = a$ ,  $DC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ; b)  $A'D^2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ ; c)  $\cos \widehat{ABA'} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 3}{6}}$ .

$\cos \widehat{ACA'} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{3}}$ .

10.  $60^\circ$ .

11.  $\frac{3(9 + 4\sqrt{3})}{4} \text{ cm}^2$ .

12. a)  $45^\circ$ ; b)  $S' = S \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

13.  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\mathcal{A} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ .

14.  $OO' = 14 \text{ cm}$ .

# **PROBLEME 10 (pagina 62)**

1.  $\mathcal{V} = 80 \text{ cm}^3$ .

2.  $\mathcal{V} = 160\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

3. a)  $\mathcal{V} = 4,8 \text{ m}^3$ ; b)  $\mathcal{A}_t = 6(2,4 + \sqrt{2}) \text{ m}^2$ ; c)  $45^\circ$ .

4.  $\mathcal{A}_t = 42 \text{ m}^2$ ,  $\mathcal{V} = 12 \text{ m}^3$ .

5. a) Se aplică teorema celor trei perpendiculare. b)  $\mathcal{V} = 320 \text{ cm}^3$ .

6.  $\mathcal{V} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

7. Triunghi echilateral cu latura  $l = \frac{a}{2}$ ,  $\mathcal{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ .

8.  $\mathcal{A}_t = a^2\sqrt{3}$ ,  $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ .

9. Se obține un hexagon din care lipsesc două triunghiuri echilaterale

10. Trapez.

11. Dreapta de intersecție a planelor  $(ABA)$  și  $(ACA')$  se intersectează cu  $OO'$  într-un punct  $G$ .

12. Se aplică teorema celor trei perpendiculare și se ține seama că intersecțiile a două plane perpendiculare pe un al treilea este o dreaptă perpendiculară pe acesta.

13. Toate trec printr-un punct egal depărtat de cele patru vîrfuri

14. Muchia comună a celor două unghiuri drepte este perpendiculară pe planul celorlalte două muchii respective și se aplică teorema celor trei perpendiculare

15. Notăm  $OA = a$ ,  $OB = b$ ,  $OC = c$ . Rezultă că  $S_{OAC} = \frac{ac}{2}$ ,  $S_{OAB} = \frac{ab}{2}$ ,  $S_{OBC} = \frac{bc}{2}$ . Fie  $CD$  o înălțime a triunghiului  $ABC$ . Atunci,  $OD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

$CD = \sqrt{c^2 - \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + b^2c^2 + a^2b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  și  $S_{ABC} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}{2}$ .



16. Din  $B$  ducem  $BE$ , înălțimea triunghiului  $BCD$  ( $E \in CD$ ). Se demonstrează că  $CD \perp (ABE)$  și apoi că  $(BCD) \perp (ABE)$ , rezultând astfel că înălțimea din  $A$  a tetraedrului cade pe  $BE$ .

Fie  $H$  piciorul înălțimii din  $A$ . Dacă, în plus,  $AC \perp BD$ , atunci  $H \in CF$  ( $CF$  fiind înălțimea feței  $BCD$ ). Deci  $BC \perp (DHA)$  și  $BC \perp AD$ .

Laturile opuse ale tetraedrului fiind respectiv perpendiculare, picioarele înălțimilor tetraedrului sînt ortocentrele fețelor.

#### PROBLEME 11 (pagina 61)

1.  $\mathcal{A}_1 = 24 \text{ cm}^2$ .

2. a)  $G$  și  $S$  împart în același raport medianele triunghiurilor  $AB'C$  și  $MNP$ ;  
b) Dacă  $D$  și  $E$  sînt mijloacele lui  $BC$  și  $NP$ ,  $DE = 9 \text{ cm}$ , fiind linie mijlocie în trapezul  $BCPN$ . Se duce  $MF \perp AD$ . Dacă  $MF \cap SG = \{L\}$ ,  $LG = DF = AM$ ,  $AM = 6 \text{ cm}$ ,  $FE = 3 \text{ cm}$  în triunghiul  $MFE$ :  $SL \parallel EF$ ,  $\frac{LS}{FE} = \frac{MS}{ME} = \frac{2}{3}$ ,  $LS = 2 \text{ cm}$ ,  $SG = 8 \text{ cm}$ ;

c)  $SG = \frac{a + b + c}{3}$ .

3. Mijloacele muchiilor menționate sînt conținute în secțiunea realizată de un plan ce trece prin mijloacele segmentelor  $AA'$ ,  $A'B'$ ,  $A'D$ . Oricare din laturi se calculează ca linie mijlocie într-un triunghi cu baza o diagonală a unei fețe.

4. Triunghi, patrulater, pentagon.

5. Idem cu 4, plus hexagon.

6. a), b) se formează un paralelogram.

7. Se exprimă fiecare sumă în funcție de distanța dintre punctele de intersecție ale diagonalelor bazelor și  $\alpha$ .

#### PROBLEME 12 (pagina 63)

1. a)  $13 \text{ cm}$ ; b)  $\frac{60}{13} \text{ cm}$ .

2. a)  $192 \text{ cm}^2$ ; b)  $BD' = 2\sqrt{57} \text{ cm}$ ,  $AC' = 10 \text{ cm}$ .

3. a)  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

4.  $(384 + 60\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ .

5. a)  $BB'CC'$ ; b)  $BD \perp AC'$ .

6. Se calculează  $AQ$  ca proiecție a catetei  $AD$  din triunghiul dreptunghic  $ADC'$ .

7. Dacă  $A'Q \perp AD'$ , din triunghiul dreptunghic  $B'A'Q \Rightarrow B'Q = 15 \text{ cm}$ .

8.  $104 \text{ cm}^2$ .

9. Un triunghi cu dimensiunile de  $25 \text{ cm}$ ,  $5\sqrt{34} \text{ cm}$  și  $15\sqrt{5} \text{ cm}$ .

10.  $7 \text{ cm}$ ,  $3 \text{ cm}$ .

11.  $d_1 = \sqrt{h^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$ ,  $d_2 = \sqrt{h^2 + 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$ .

12.  $4 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$ ,  $10 \text{ cm}$ .

14. Se construiește cubul cu un vîrf în  $A$  și muchii  $AB$ ,  $AC$ ,  $AA'$ . Se observă că  $A'D$  este diagonală feței paralelă cu  $(ABC)$   $AD = a\sqrt{3}$ . Din triunghiurile dreptunghice  $ADB$  și  $ADC \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$  și  $DC = a\sqrt{2}$ .

PROBLEME 13 (pagina 67)

1.  $V = 144\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

2.  $V = 240\sqrt{3} \text{ m}^3$ .

3.  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 2\mathcal{A}_B$ ,  $\mathcal{A}_B = 12\sqrt{3} \text{ m}^2$ ;  $V = 300\sqrt{2} \text{ m}^3$ .

4.  $V = 90\sqrt{2} \text{ m}^3$ .

5.  $V = a^2 \cdot a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$ .

6.  $V = \frac{a^3b}{2}$ .

7.  $V = 16 \cdot 12 \cdot 3,2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3,2}{2 \cdot 3} = 608 \text{ (cm}^3\text{)}$ ,  $\mathcal{A}_1 = 556 \text{ cm}^2$ .

8.  $V = 360 \text{ cm}^3$ .

9.  $EB$  este diametrul cercului circumscris bazei.  $EB = 10 \text{ cm}$ ,  $BB' = 24 \text{ cm}$ ,  $V = 900\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ,  $\mathcal{A}_1 = 720 \text{ cm}^2$ .

10.  $FF' = 6 \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_1 = 108(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$ ,  $V = 324\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

11. a) Se consideră triunghiul dreptunghic  $AOA'$ ,  $A'O = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ ,  $V = 96 \text{ cm}^3$ ;

b)  $\text{tg } \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{8} : \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{8}$ .

12. Volumul de apă care se scurge din vas este egal cu volumul unei prisme ce are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de 4 cm și 8 cm și ca înălțime, latura pătratului.  $V_1 = 128 \text{ cm}^3$ ,  $V$  apă rămasă =  $768 - 128 = 640 \text{ (cm}^3\text{)}$ ;  $h = 640 : 64 = 10 \text{ (cm)}$ .

13. Latura bazei este egală cu  $2a \sin 15^\circ$ ,

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2 \sin^2 15^\circ}{(\sqrt{3})^2}} = a \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 15^\circ}{3}}$$

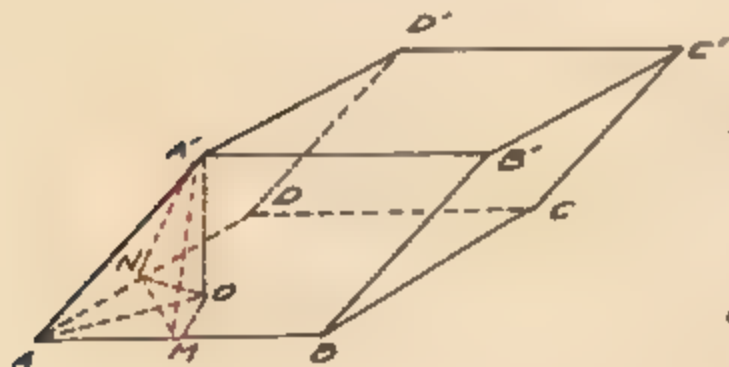


Fig. R.8

14. Priviți în figura R.8:  $\angle BAD = \angle BAA' = \angle DAA'$ ,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $M \in AB$ ,  $A'M \perp AB$ ,  $N \in AD$ ,  $A'N \perp AD$ ,  $A'M = A'N$ ,  $A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $AM = \frac{a}{2}$ .

Ducem  $A'O \perp (ABD)$ , ( $O \in (ABD)$ ),  $OM \perp AB$ ,  $OM = \frac{OA}{2}$ ,  $OA^2 - OM^2 = AM^2$ ,  $OA^2 - \frac{OA^2}{4} = AM^2$ ,  $\frac{3}{4} OA^2 = \frac{a^2}{4}$ ,  $OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $A'O = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}}$ ,  $A'O = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ;  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ .

15. Aria corpului a rămas aceeași. Volumul corpului s-a micșorat cu  $\frac{a^3}{8}$ .

16.  $MD = ND$ ,  $MD = 5 \text{ m}$ ,  $l = 10 \text{ m}$ ,  $V = 1000 \text{ m}^3$ ,  $\mathcal{A}_1 = 600 \text{ m}^2$ .

17. Fie  $P$  mijlocul lui  $BC$ . Avem:  $AN^2 = AP^2 + NP^2 = \frac{9l^2}{4}$ ,  $l = 2 \text{ dm}$ ,  $V = 8 \text{ dm}^3$ .

18.  $\mathcal{A}_2 = 94 \text{ m}^2$ .

19. Se obțin două prisme triunghiulare drepte și un paralelipiped dreptunghic.

$$V_1 = \frac{5 \cdot 5}{2} \cdot 10 = 125 \text{ (m}^3\text{)}, V_2 = 400 \text{ cm}^3, V_3 = 300 \text{ cm}^3, \mathcal{A}_1 = 25(5 + 2\sqrt{2}) \text{ cm}^2,$$

$$\mathcal{A}_2 = 340 \text{ cm}^2, \mathcal{A}_3 = 360 \text{ cm}^2.$$

#### PROBLEME 14 (pagina 74)

1.  $288 \text{ cm}^2$ ;

2.  $1,8 \text{ m}$  și  $4 \text{ m}$ .

3.  $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ .

4.  $\sqrt{1945} \text{ cm}$ ,  $\sqrt{793} \text{ cm}$ ,  $3552 \text{ cm}^2$ .

5.  $\sqrt{61} \text{ m}$ ,  $\frac{13}{2} \text{ m}$ ,  $\frac{135\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2$ ;

6.  $36\sqrt{133} \text{ cm}^2$ ,  $36(\sqrt{133} + 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ ,  $5 \text{ cm}$ .

7. a)  $M \in VA$ ,  $BM \perp VA$ ,  $\sin \widehat{BMD} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\cos \widehat{BMD} = -\frac{1}{3}$ ; b)  $E \in AB$ ,

$AE = EB$ ,  $F \in CD$ ,  $CF = FD$ ,  $\sin \widehat{EVF} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\cos \widehat{EVF} = \frac{1}{3}$ ; c)  $45^\circ$ .

8. Se arată că triunghiurile  $ANC$  și  $BMD$  sînt isoscele.

9. a)  $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $a_p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos u = \frac{1}{3}$ ; b)  $d = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3} - x}}{3}$ ; c) Suma distanțelor este  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

10. Secțiunea formată  $S'$  este un triunghi asemenea cu  $VBC$ . Se utilizează faptul că raportul ariilor este egal cu pătratul raportului de asemănare.

11.  $\mathcal{A}_1 = 16\sqrt{3}(1 + \sqrt{5}) \text{ cm}^2$ .

12. a)  $a^2$ ,  $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ ,  $a^2\sqrt{2}$ ; b)  $a^3$ .

13. a)  $MD = \frac{1}{2} \cdot VB = MB$ ; b) ducem înălțimea  $NP$  ( $N \in BC$ ,  $P \in AD$ ), prin  $O$ , a paralelogramului;  $\sphericalangle MNO = \sphericalangle MPO$ .

14.  $3a^2$ .

15. Trapez.

16.  $3 = 2 + 1$  și două muchii aparțin, fie bazei, fie sînt muchii laterale, concurente fiind, determină un plan.

17. a)  $64\sqrt{7} \text{ cm}^2$ ,  $\frac{256\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3$ ; b)  $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

$$18. a) \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm}; b) \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}; c) \mathcal{A}_1 = 2 \text{ cm}^2, \mathcal{A}_2 = 3 \text{ cm}^2.$$

$$19. a) AP, CP \text{ sînt mediane în triunghiuri dreptunghice cu aceeași ipotenuză (SB), } \frac{a^2\sqrt{5}}{2}; b) a^2(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

$$20. a) 6\sqrt{41}, 24; b) \cos \widehat{MOB} = 0,8.$$

21. Se consideră ca bază a piramidei o față laterală. Se ține seama întâi că din toate piramidele cu aceeași bază și cu muchia laterală constantă, cea cu volum maxim este cea în care muchia laterală este înălțime; apoi, că din toate triunghiurile isoscele cu laturile congruente de lungime constantă, cel de arie maximă este triunghiul dreptunghic. Se găsește  $x = a\sqrt{2}$ .

$$22. \frac{\mathcal{A}'_1}{\mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{A}'_2}{\mathcal{A}_2} = \frac{x^2}{h^2} = \frac{1}{2}, \text{ (unde } x \text{ este distanța de la vîrf la plan), } x = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

$$23. a) \frac{2\sqrt{39}}{3} \text{ cm}; b) \frac{14\sqrt{13}}{3} \text{ cm}^2.$$

$$24. 86\sqrt{3} \text{ m}^2.$$

$$25. \mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{PPQ} \cdot HE, \left( \mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2} \right).$$

26. Se exprimă volumul piramidei în două moduri: o dată cu baza triunghiul echilateral și o dată ca sumă de două piramide cu baza  $S$ .  $\left( S = \frac{75\sqrt{3}}{13} \text{ cm}^2 \right).$

$$27. \frac{8\sqrt{3} - 4\sin^3 15^\circ}{3\sin 15^\circ} \text{ sau } \frac{16}{3}\sqrt{12\cos^3 15^\circ - 1}.$$

$$28. \text{ Se calculează volumul în două moduri. } \mathcal{V} = \frac{30 \cdot 40 \cdot 70}{6} \text{ cm}^3 = 14\,000 \text{ cm}^3 \text{ și}$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \cdot h. \text{ Se obține: } h = \frac{42\,000}{\mathcal{A}_{ABC}}, h = \frac{840}{37} \text{ cm.}$$

29. b) 1; d) poziția dată în enunț.

30. Fie  $M, N$  intersecțiile dreptelor  $AA'$  și  $DD'$ , respectiv  $BB'$  și  $CC'$ . Ducînd prin  $M$  și  $N$  plane perpendiculare pe  $(ABC)$  și paralele cu  $AD$ , acoperișul se descompune în două piramide (cu bazele dreptunghiuri congruente și avînd ca înălțime distanța dreptei  $MN$  la planul  $(ABC)$  și o prismă cu baza un triunghi isoscel și înălțimea  $NM$ ).

Pentru determinarea dimensiunilor necunoscute se folosește asemănarea. Se găsește înălțimea acoperișului  $\frac{a\sqrt{23}}{4}$  și lățimea bazelor piramidelor  $\frac{3a}{4}$ . Volumul căutat este  $\frac{3a^3\sqrt{23}}{16}$ .

$$31. \frac{27\sqrt{2}}{2} \text{ m}^2.$$

32. a)  $a^3 \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$ ; b) Se arată că  $VA^2 + VC^2 = AC^2$ ; c) Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul  $VA'O'$  ( $O'$  centrul pătratului  $A'B'C'D'$ ) și se găsește  $a = 3 \text{ m}$ .

89.  $\frac{16}{9} \text{ m}^3$ .

84.  $1 \text{ cm}^3$ .

85. a)  $4 \text{ dm}^3$ ; b)  $\sin \alpha = 3\sqrt{0,1}$ .

86.  $100\sqrt{3} \text{ dm}^3$ ,  $\frac{250\sqrt{2}}{3} \text{ dm}^3$ .

87. a) figura R.9; b)  $\alpha\sqrt{3}$ ; c)  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ .

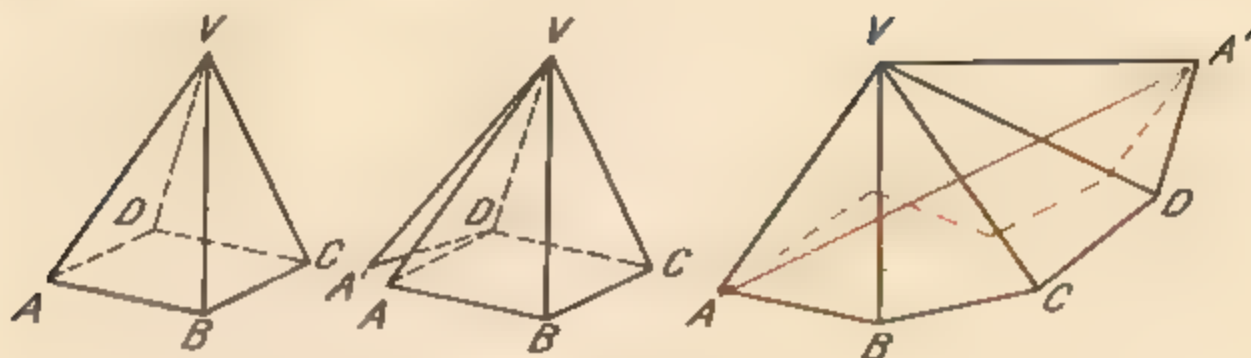


Fig. R.9

88. Punct interior egal depărtat de vîrfuri.

# PROBLEME 15 (pagina 81)

1.  $a_p = \sqrt{25 - \left(\frac{6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$ ;  $h = \sqrt{25 - (R - r)^2}$ ,

unde  $R$  și  $r$  sînt razele cercurilor circumscrise bazelor ( $R = 6 \text{ m}$ ,  $r = 2 \text{ m}$ ,  $h = 3 \text{ m}$ ),  
 $\mathcal{A}_1 = 12\sqrt{39} \text{ m}^2$ ,  $\mathcal{V} = 39\sqrt{3} \text{ m}^3$ .

2.  $I = \frac{h \cdot L}{L - l}$ .

3.  $\frac{70}{11} \text{ cm}^3$ .

4. a)  $\mathcal{V} = 168\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ; b)  $\mathcal{A}_1 = 36\sqrt{21} \text{ cm}^2$ .

5. Notăm cu  $\mathcal{V}_1$  volumul piramidei înălțurate și cu  $\mathcal{V}$  volumul piramidei mari.  
 Evident,  $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{8} \cdot \mathcal{V}$ ;  $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ;  $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$ ;  $\frac{H-h}{H} = \frac{1}{2}$ ;  $H-h = \frac{H}{2}$ ;  
 $H-h = 4 \text{ cm}$ ;  $h = 4 \text{ cm}$ .

6.  $63\sqrt{3} = \frac{h}{3} \cdot (36\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3})$ ,  $h = 3 \text{ cm}$ . Se calculează apoi și celelalte dimensiuni:  $a_p = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ , muchia  $= \sqrt{21} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_1 = 54\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

7.  $l = 4 \text{ m}$ . Apotema trunchiului de piramidă este de  $8 \text{ m}$ . Se formează triunghiul dreptunghic care are ca ipotenuză apotema trunchiului și catetele: înălțimea trunchiului



și  $(R - r) : 2$ . Obținem:  $h = \sqrt{61}$  m,  $S = 25\sqrt{3}$  m<sup>2</sup>,  $s = 4\sqrt{3}$  m,  $V = 19\sqrt{189}$  m<sup>3</sup>, muchia laterală =  $\sqrt{73}$  m.

8. Dacă se notează trunchiul cu  $ABCD A' B' C' D'$ , se consideră trapezul isoscel  $ACC' A'$ , în care se cunosc bazele și diagonala. Înălțimea trapezului este înălțime și pentru trunchiul de piramidă.  $\mathcal{A}_1 = 24\sqrt{10}$  m<sup>2</sup>,  $V = 109$  m<sup>3</sup>.

$$9. \mathcal{A}_B = 32\sqrt{3} \text{ cm}^2, \mathcal{A}_b = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2; h = 24\sqrt{3} \text{ cm}, \left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B},$$

$$\frac{H-4}{H} = \frac{3}{4}, H = 96\sqrt{3} \text{ cm}.$$

10. Muchiile laterale ale piramidei fiind congruente, piciorul înălțimii este centrul cercului circumscris trapezului. Unghiurile ascuțite ale trapezului fiind de câte 60°, diagonalele lui sînt cît latura triunghiului echilateral înscris în cerc. Muchiile laterale formînd cu planul bazei unghiuri de câte 45°, rezultă că înălțimea piramidei este cît raza cercului circumscris trapezului. Se găsește că înălțimea piramidei este de  $\frac{2\sqrt{39}}{3}$  cm, iar volumul trunchiului de piramidă  $\frac{49\sqrt{13}}{12}$  cm<sup>3</sup>.

11. Se folosește relația  $\frac{P \cdot a}{P \cdot A} = \frac{1}{2}$  ( $p, a$  fiind perimetrul și apotema piramidei mici și  $P, A$  ale celei mari). Dacă notăm cu  $x$  distanța de la vîrf la secțiunea în piramidă:  $\frac{x^2}{144} = \frac{1}{2}$ . De unde,  $x = 6\sqrt{2}$  cm.

$$12. h^2 = (4a)^2 - \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2, h \text{ fiind înălțimea trunchiului de piramidă, } \mathcal{A}_1 = \frac{72 + 5\sqrt{3}}{4} \cdot a^2, V = \frac{7\sqrt{191}}{24} \cdot a^3.$$

13. Apotema trunchiului este  $A = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$  m. Se calculează apoi înălțimea trunchiului, din triunghiul dreptunghic care are ipotenuza  $A$  și catete: înălțimea  $h$  și  $A' - a'$ , unde  $A'$  și  $a'$  sînt apotemele bazelor. Se găsește  $h = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$  m și  $V = \frac{(a^3 - b^3)\sqrt{2}}{12}$  m<sup>3</sup>.

14. Dacă notăm cu  $H$  înălțimea piramidei din care face parte trunchiul și cu  $h$  înălțimea trunchiului, putem scrie:  $\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{S_1}{S_2}$  și  $\left(\frac{H-\frac{h}{2}}{H}\right)^2 = \frac{S}{S_2}$ . Din prima relație se scoate  $h = \frac{H(\sqrt{S_2} - \sqrt{S_1})}{\sqrt{S_2}}$ . Avem:  $\frac{H-\frac{h}{2}}{H} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2\sqrt{S_2}}$ , iar relația a doua devine:  $\left(\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2\sqrt{S_2}}\right)^2 = \frac{S}{S_2}$  sau  $S = \frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{4}$ .

15. Dacă se notează cu  $x$  înălțimea piramidei mici, avem:  $\frac{x}{I+x} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S}}$ . De unde:

$$\frac{x}{I} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}} \text{ sau } x = \frac{I\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}}. \text{ Înălțimea } H \text{ a piramidei este: } H = \frac{I\sqrt{s}}{\sqrt{S} - \sqrt{s}},$$

$$\text{iar volumul: } U = \frac{IS\sqrt{s}}{3(\sqrt{S} - \sqrt{s})}.$$

### PROBLEME 17 (pagina 89)

1. Planul bisector și orice plan perpendicular pe muchia comună.

2. Planele bisectoare ale celor patru diedre formate (sînt două plane perpendiculare) și orice plan perpendicular pe intersecția lor, în cazul cînd planele inițiale nu sînt paralele, iar, în cazul cînd planele sînt paralele, un plan paralel cu ele, situat între ele, la distanțe egale de acestea și orice plan perpendicular pe ele.

3. Dacă planele sînt secante, axa de simetrie este muchia lor comună sau orice dreaptă dintr-un plan bisector, perpendiculară pe muchia lor comună; dacă planele sînt paralele, axa de simetrie este orice dreaptă perpendiculară pe ele sau conținută în planul echidistant.

4. Are un centru de simetrie,  $3 + 6 = 9$  axe de simetrie și  $3 + 6 = 9$  plane de simetrie.

5. Nu are nici un centru de simetrie, șase plane de simetrie, trei axe de simetrie.

6. Cele cu număr par de laturi la poligonul de bază. Plane de simetrie sînt  $n$  la cele cu un număr impar ( $n$ ) de laturi la poligonul de bază și  $2n$  la cele cu un număr par ( $n$ ) de laturi ale poligonului de bază. Axe de simetrie au numai prisme cu număr par de laturi ale bazei.

7. Piramidele regulate cu număr  $n$  par de laturi ale poligonului de bază au  $2n$  plane de simetrie. Cele cu  $n$  impar, au  $n$  plane de simetrie. Ambele au o singură axă de simetrie.

8. Locul geometric al lui  $P$  este o dreaptă  $p \parallel d$ . Locul geometric al lui  $Q'$  este o dreaptă  $q \parallel d$ . Rezultă că  $p \parallel q$ , deci coplanare. Atenție! Nu orice punct al acestui plan aparține acestor locuri geometrice.

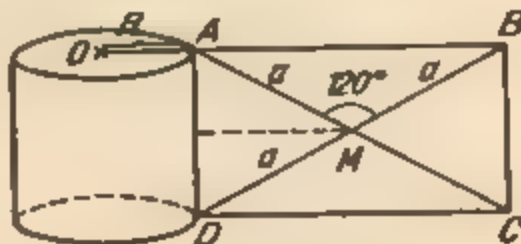
9. Rotim triunghiul  $ABC$  în jurul lui  $BC$  pînă cînd punctul  $A$  ajunge în planul de proiecție. Punctul  $A'$  va fi interior triunghiului  $ABC$ ,  $AA' \cap BC = M$ . Exprimăm unghiurile  $A$  și  $A'$  ca sume de două unghiuri (din care cele din  $A'$  sînt exterioare triunghiului).

### PROBLEME 18 (pagina 104)

1. Cu notațiile din figura R.10,  $\triangle ADM$  este echilateral, deci generatoarea  $AD = a$  și  $AB = a\sqrt{3} = 2\pi R$ , de unde  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2\pi}$ . Problema admite și o a doua soluție:

$$G = a\sqrt{3} \text{ și } R = \frac{a}{2\pi}.$$

Fig. R.10



2.  $60^\circ$ .

$$3. B'A = \sqrt{4r^2 + g^2}.$$



Fig. R.11

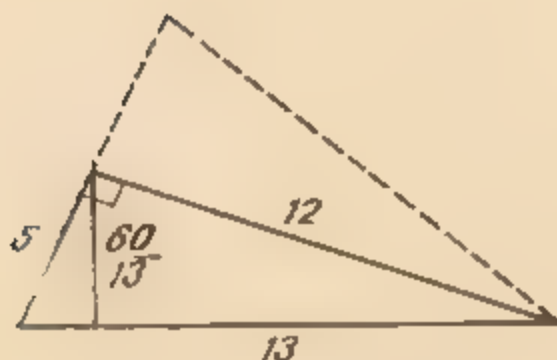


Fig. R.12

b) Se folosește teorema lui Pitagora.

$$\left( \frac{1}{\pi \frac{b^2 c^2}{3a^2} a} \right)^2 = \left( \frac{1}{\pi b^2 c} \right)^2 + \left( \frac{1}{\pi c^2 b} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{a}{b^2 c^2} \right)^2 = \left( \frac{1}{b^2 c} \right)^2 + \left( \frac{1}{c^2 b} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^4 c^4} = \frac{1}{b^4 c^2} + \frac{1}{c^4 b^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = c^2 + b^2.$$



Fig. R.13

$$BC = r\sqrt{3}, AC = r\frac{\sqrt{6}}{2}, h = \sqrt{AC^2 - r^2} = \sqrt{r^2 \cdot \frac{3}{2} - r^2} = r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$V = \pi r^2 \frac{\sqrt{2}}{6}; a) V = \pi 0,8^2 \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ m}^3 = \frac{0,256}{3} \pi \sqrt{2} \text{ m}^3.$$

4.  $\frac{40}{3}$

5. 6 cm.

6. Din figura R.11 se ajunge la:  $8\pi = 2x\pi$ , deci  $x = 4$  cm.

7. 8 cm și 4 cm.

8. O pînă conică în care generatoarea face cu  $d$  un unghi  $\theta$ .

9. Planul este tangent la sferă. Distanța de la centru la plan este egală cu raza, (10 cm).

10.  $d = 0,25\sqrt{3}$  m.

11. a) Una interioară celeilalte; b) exterioare; c) secante; d) imposibil: sfera a doua are raza negativă.

12. Două soluții: 7 cm sau 1 cm.

13. O sferă de diametru  $AB$ .

### PROBLEME 19 (pagina 112)

1.  $r = 6$  cm,  $V = 16\,200\pi \text{ cm}^3$ .

2.  $R = 4$  dm,  $V = 40\pi \text{ dm}^3$ .

3.  $V = 96\pi \text{ cm}^3$ .

4. Figura R.12  $V_1 = 100\pi \text{ cm}^3$ ,

$V_2 = 240\pi \text{ cm}^3$ ,  $V_3 = \frac{1\,200}{13} \text{ cm}^3$ .

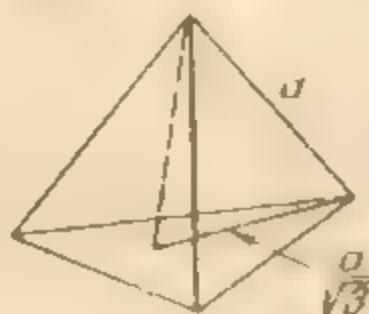
5. Este în fond un con circumscris unui triedru tridreptunghic (fig. R.13). Rezolvăm întâi punctul b) și particularizăm la a), după aceea.

Dacă notăm cu  $A$  vârful conului, cu  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  cele trei generatoare și cu  $h$  înălțimea conului, avem:

$$6. h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \mathcal{V} = \frac{\pi a^2 \sqrt{\frac{2}{3}}}{27} \quad (\text{fig. R.14})$$

$$\text{Caz particular } \mathcal{V} = \pi \frac{6^3 \sqrt{\frac{2}{3}}}{27} \text{ cm}^3 = 8\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ cm}^3$$

Fig. R.14



$$7. a) 2\pi ab = 2\pi ab, \text{ arii laterale egale (fig. R.15)}$$

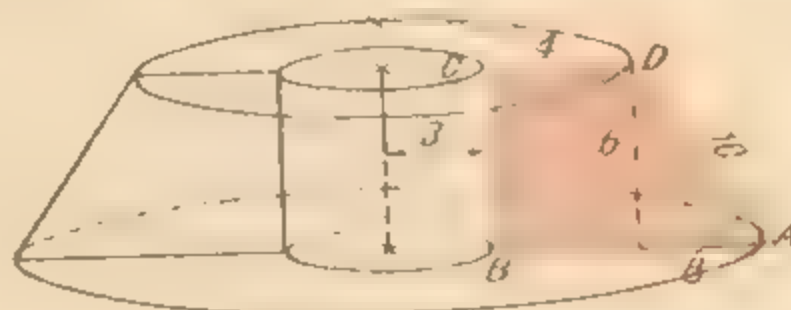
Fig. R.15



$$b) \pi a^2 b \text{ se compară cu } \pi b^2 a, \text{ evident, dacă } b = a \Rightarrow b^2 a \pi = a^2 b \pi$$

8. Cu notațiile din figura R.16 și aplicând cteorema lui Pitagora înălțimea trapezului, se găsește  $BC = 8$  cm.

Fig. R.16



$$\mathcal{A}_{\text{tot}} = \mathcal{A}_{\text{tot}} \text{ a tr. de con} = \mathcal{A}_{\text{laterale a c. cilindric}} + 2 \mathcal{A}_{\text{bazei cilindrului}} \\ = \pi 10(7 + 15) + \pi 7^2 + \pi 15^2 + 36\pi - 2\pi \cdot 9 = \pi(220 + 49 + 225 - 36 - 18) = 512\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Pentru volum:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V} \text{ trunchiului de con} - \mathcal{V} \text{ cilindric} = \pi \frac{h}{3} (10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2) - \pi \cdot 9 \cdot 6 = \\ = 2\pi \cdot 379 - 54\pi = 758\pi - 54\pi = 704\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$9. R = 3\sqrt{2} \text{ cm; } \mathcal{V} = 18\pi \cdot 8\sqrt{2} = 144\sqrt{2}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

10.  $G = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{V} = \frac{125}{3}\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$

11. Din cilindru: circumscris conului hașurat în figura R.17 a) lipsește o treime, iar din cel din figura R.17 b) lipsesc două treimi, deci diferența de volum  $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2$  este o

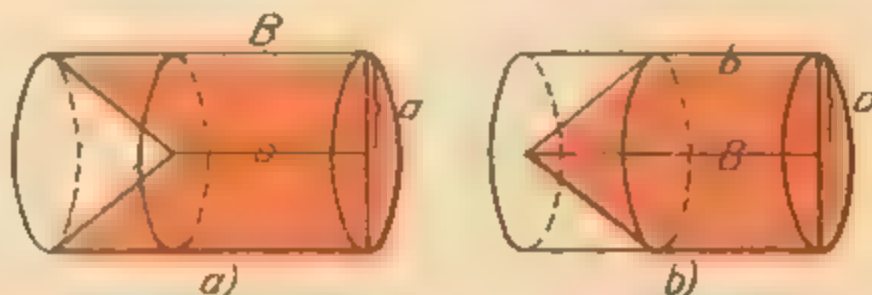


Fig. R.17

treime din cilindru (ca volum), deci un con:  $\frac{\pi(R-b)a^2}{3} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 \Rightarrow$

$$R - b = \frac{3(\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2)}{\pi a^2}.$$

12. Rezolvăm punctul b) și particularizăm apoi pentru  $a = 6 \text{ cm}$ . Facem o secțiune axială în con, determinată de secțiunea diagonală  $ACC'A'$  prin cub (fig. R.18). Notând cu  $x$  latura cubului și, ținând seama de asemănarea triunghiurilor  $SAC$  cu  $SPQ$ , obținem:

$$\frac{x\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{s-x}{a} \Rightarrow x = \frac{2a}{3}, \mathcal{V} = \frac{8a^3}{27}.$$

În cazul a), unde  $a = b \text{ cm}$ ,  $x = \frac{36}{4} = 4 \text{ (cm)}$ ,  $\mathcal{V} = 64 \text{ cm}^3$

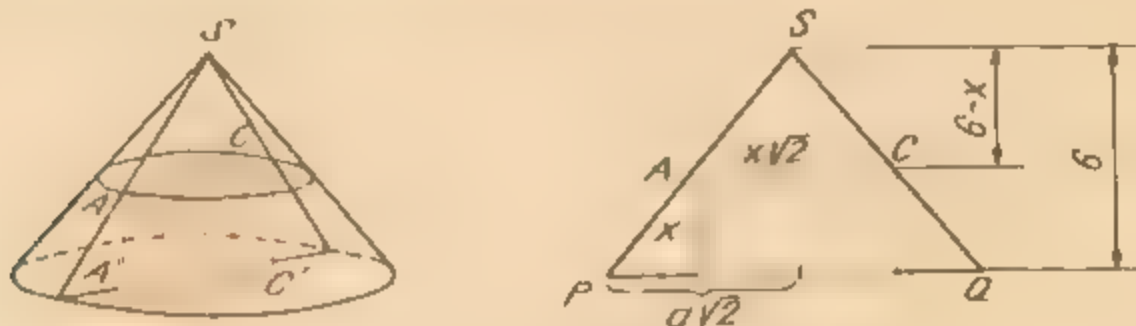


Fig. R.18

13. a) Raportul de asemănare dintre conul mic și conul mare este  $\frac{1}{4}$  (fig. R.19).

Volumul conului mare este  $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \cdot 1024 \text{ cm}^3$ , al conului mic  $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{4^3} \cdot \mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \cdot 16 \text{ cm}^3$ ,

iar cel al trunchiului de con  $\mathcal{V}_{tr} = \mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = \frac{1024\pi}{3} - \frac{16\pi}{3} = 336\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$



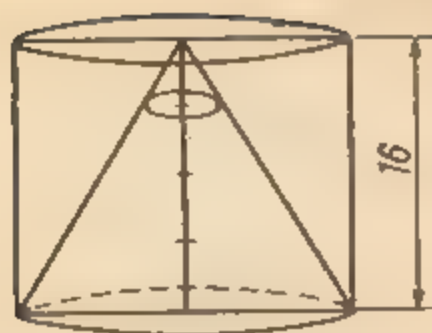


Fig. R.19

b) Raportul de asemănare între conul mic și cel mare trebuie să fie, în acest caz  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Deci  $\frac{h}{16} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $h = 8\sqrt{2}$  cm și distanța de la bază va fi  $16 - 8\sqrt{2} = 8(2 - \sqrt{2})$  cm.

Se mai poate calcula și direct, calculând întâi aria laterală a conului mare etc

$$14. V_{\text{trunchi}} = 29,792\pi \text{ cm}^3; V_{\text{con}} = 2,592\pi \text{ cm}^3, V_{\text{corp}} = 27,2\pi \text{ cm}^3 \text{ (fig. R.20)}$$

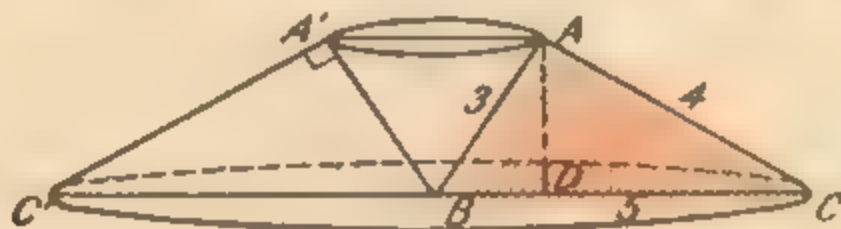


Fig. R.20

$$15. a) \pi 10 (R + r) = 220\pi, \text{ duce la: } R + r = 22, r = \frac{4}{7} R, \text{ deci } \frac{11}{7} R = 22;$$

$$R = 14 \text{ cm}, r = 8 \text{ cm}; s = 64\pi \text{ cm}^2, S = 196\pi \text{ cm}^2, \sigma_{\text{tot}} = 480\pi \text{ cm}^2,$$

$$V = \frac{8\pi}{3} (196 + 64 + 14 \cdot 8) \text{ cm}^3 = 992\pi \text{ cm}^3.$$

$$16. \text{ Din fig. R.21, rezultă: } r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ m; a) } \sigma_{\text{sf}} = 4\pi \cdot 25 = 100\pi \text{ (m}^2\text{),}$$

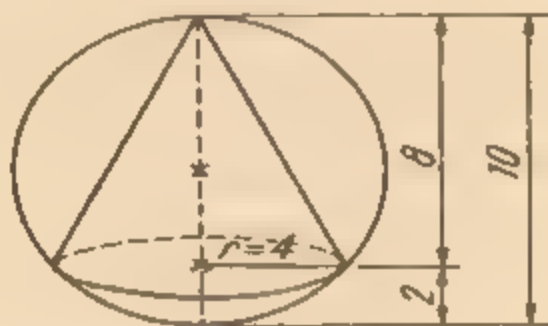


Fig. R.21

$$V_{\text{sf}} = 4\pi \cdot \frac{125}{3} = \frac{500\pi}{3} \text{ (m}^3\text{); b) } \sigma_{\text{con}} = \pi \cdot 4 \cdot \sqrt{80} + \pi \cdot 16 = 16\pi(1 + \sqrt{5}) \text{ (m}^2\text{),}$$

$$V_{\text{con}} = \frac{16 \cdot 8\pi}{3} = \frac{128\pi}{3} \text{ (m}^3\text{); c) } \sigma_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 8 \text{ m}^2 = 80\pi \text{ m}^2, \sigma_2 = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 \text{ m}^2 = 20\pi \text{ m}^2.$$

17. (Fig. R.22)  $h_{\text{cal}} = R - \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$ ,  $\mathcal{A}_{\text{cal}} = 2\pi Rh = R^2(2 - \sqrt{3})\pi$ .

Fig. R.22



18. (Fig. R.23) Se exprimă volumul în două moduri:



Fig. R.23

$$V = \frac{a^3}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \text{ și } V = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{r}{3}, \text{ de unde } \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \cdot r,$$

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

19. Centrul sferei se află în planul mediator al coardei comune.

20. Virfurile unei fețe aparțin intersecției planului acelei fețe cu sfera, care este un cerc.

21. Punctele  $P, Q, B, A$  sînt pe intersecția sferei cu diametrul cît diagonala drept unghiului, cu planul  $APQ$ .

22. Se folosește faptul că tangentele duse dintr-un punct la un cerc, coplanar cu el, sînt congruente.

23.  $MN$  este diametrul sferei circumscrise tetraedrului  $ABCD$ .

## PROBLEME RECAPITULATIVE (pagina 115)

1. 10 plane (se lasă, pe rând, cîte două puncte în afara planului determinat de celelalte trei).

2. Dacă  $A, B, C, D$  sînt patru puncte necoplanare,  $D$  nu aparține planului  $(ABC)$ . Există drepte care trec prin  $D$  și nu aparțin lui  $(ABC)$ . Fie  $d_1 \parallel AB$ , deci  $d_1$  nu este paralelă cu  $BC$  și nici coplanară cu  $BC$ .

3. Considerăm problema rezolvată. Ne bazăm pe faptul că diagonalele unui paralelogram se înjumătățesc. Deci, mijlocul  $M$  al segmentului  $AB$  este și mijlocul lui  $CD$ . Simetrica lui  $d$  față de  $M$  va intersecta planul  $\alpha$  în  $C$ .  $CM$  intersectează pe  $d$  în  $D$ .  $ABCD$  este paralelogramul căutat.

4. a) Considerăm problema rezolvată. Planul determinat de  $d$  și  $C$  conține dreapta  $CD$ . Planul determinat de  $c$  și  $D$  conține și el dreapta  $CD$ . Deci  $CD$  este intersecția celor două plane.

Problema revine deci la a intersecta planul care conține pe  $d$  și este paralel cu  $AB$  cu cel care conține pe  $c$  și este paralel cu  $AD$ . Intersecția lor va fi dreapta  $CD$ , iar punctele în care  $c$  și  $d$  se înțepă respectiv sînt punctele  $C$  și  $D$ .

6. Se aplică teorema celor trei perpendiculare

7.  $60^\circ$ .

8. a) Știm că dacă două plane neparalele (în cazul nostru  $DAC$  și  $NMQ$ ) intersectează pe al treilea ( $ABC$ ) după două drepte paralele, atunci și intersecția lor ( $NP$ ) va fi paralelă cu aceste drepte. Deci  $NP \parallel MQ$ . Analog se arată că și  $MN \parallel PQ$ . b) În triunghiul  $ABC$ .

$$\frac{AC}{MQ} = \frac{AB}{MB}, \quad \frac{12}{MQ} = \frac{5}{5-x} \Rightarrow MQ = \frac{12(5-x)}{5}. \quad \text{În triunghiul } ABD \quad \frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB},$$

$$\frac{MN}{7} = \frac{x}{5} \Rightarrow MN = \frac{7x}{5}, \quad p = 2(MQ + MN), \quad p = \frac{2}{5}(60 - 12x + 7x), \quad p = 2(12 - x)$$

9. a) Se calculează lungimile segmentelor  $A'C'$ ,  $B'C'$ ,  $C'A'$  și se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; b) Se calculează lungimile segmentelor  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ .

10. 9 cm.

11. a) Toate au lungimile  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ , și sînt înălțimi în triunghiuri dreptunghice congruente, ce au ipotenuza comună; c)  $BT = \frac{a}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ,  $TD' = \frac{2a}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$ ; d)  $60^\circ$

$$12. a) MC = \frac{2a}{\sqrt{3}}, \quad Q = a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2a^3, \quad b) A = 2a \cdot \frac{5a}{2\sqrt{3}} : 2 = \frac{5a^2\sqrt{3}}{6}, \quad c) \text{Nu.}$$

În triunghiul dreptunghic neisoscel  $BAM$  ( $MB \perp AB$ ,  $AB = a\sqrt{3}$  și  $BM = a\sqrt{\frac{7}{3}}$ ),

$E$  este mijlocul ipotenuzei. Triunghiul  $BEM$  este isoscel, dar nu dreptunghic.

13. 38,3838 kg.

14. a)  $MA = a\sqrt{2}$ ,  $BC = a\sqrt{2}$ , b)  $AD = BD$ ,  $AD = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

15. a)  $V = \frac{4^3\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = 24 \text{ (m}^3\text{)}$  (perpendiculara din  $C'$  pe  $BC$  este înălțimea prismei); b)  $\mathcal{A}_l = 8(\sqrt{3} + 4) \text{ m}^2$ .

16. a) Latura bazei mari este 8 cm, latura bazei mici este 5 cm. Se înlocuiește în formula volumului,  $V = 258 \text{ cm}^3$ ;

b)  $V = \frac{8^2 \cdot 16}{3} \text{ cm}^3 = \frac{1024}{3} \text{ cm}^3$ ; c)  $\mathcal{A}_{l\text{tr}} = 39\sqrt{17} \text{ cm}^2$ ,  $\mathcal{A}_l = 64\sqrt{17} \text{ cm}^2$ .

17. a) Laturile congruente au lungimile de câte 5 cm.

$\mathcal{A}_l = \pi R G = \pi 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ,  $\mathcal{A}_l = 20\pi + 16\pi = 36\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ ;

b)  $h = \sqrt{G^2 - R^2}$ ,  $h = \sqrt{25 - 16} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$ ,  $V = \frac{4^2\pi \cdot 3}{3} \text{ cm}^3 = 16\pi \text{ cm}^3$ ;

c)  $\mathcal{A}_l' = \frac{100\pi}{9} \text{ cm}^2$ ,  $V' = \frac{304\pi}{27} \text{ cm}^3$ ;

d)  $r_{sf} = \frac{4}{3} \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_{sf} = 4\pi \left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{ cm}^2 = \frac{64\pi}{9} \text{ cm}^2$ ,  $V_{sf} = \frac{4\pi \frac{4^3}{3^3}}{3} \text{ cm}^3 = \pi \left(\frac{4}{3}\right)^3 \text{ cm}^3$ .

18. a)  $r = 5 \text{ cm}$ ,  $V = 2600\pi \text{ cm}^3$ ,  $\mathcal{A}_l = 770\pi \text{ cm}^2$ ; b)  $H = 36 \text{ cm}$ ,  $V = 2700\pi \text{ cm}^3$ ;

c) Se află  $R$  din relația  $(36 - R)^2 + 225 = R^2$ ,  $R = \frac{169}{8} \text{ cm}$ .

19. a)  $CC' = AC$ ,  $AC = 2\sqrt{2} \text{ dm}$ ; b)  $S_{BCC'} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (dm}^2\text{)}$ ,

$S_{DCC'} = 2\sqrt{2} \text{ (dm}^2\text{)}$ ,  $S_{C'AB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (dm}^2\text{)} = S_{ADC'}$ ,  $\mathcal{A}_l = 4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ dm}^2$ , c)  $V = 8\sqrt{2} \text{ dm}^3$ ,  $h = \frac{V}{2\sqrt{2}} \text{ dm}$ ,  $h = \frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \text{ dm} = 4 \text{ dm}$ .

20. a)  $\widehat{AC} = 60^\circ$ ,  $\widehat{AB} = 120^\circ$ ,  $AC = R$ ,  $AB = R\sqrt{3}$ ; b)  $R^2\sqrt{3}$ ; c)  $60^\circ$ .

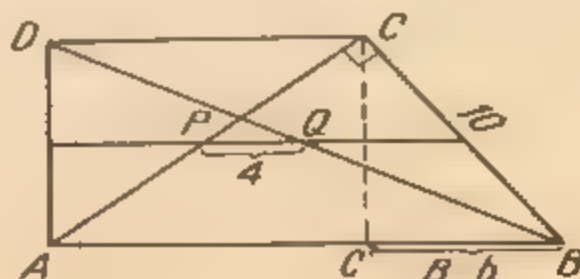
21. a)  $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ ; b) Unghiul este drept. Dacă un plan conține o dreaptă perpendiculară

pe un alt plan, cele două plane sînt perpendiculare, c)  $60^\circ$ . d)  $a\sqrt{3}$ , e)  $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ .

22. a)  $PQ = \frac{B - b}{2} = 4 \Rightarrow B - b = 8 \text{ cm}$  (fig. R.24),  $BB'' = 100 - 64 = 36$ ,

$h = 6 \text{ cm}$ ,  $100 = 8 \cdot B$ ,  $B = 12,5 \text{ cm}$ ,  $b = 4,5 \text{ cm}$ ,  $\mathcal{A}_l = 330 \text{ cm}^2$ ,  $V = 510 \text{ cm}^3$ ;  
b)  $BD = 7,5 \text{ cm}$ .

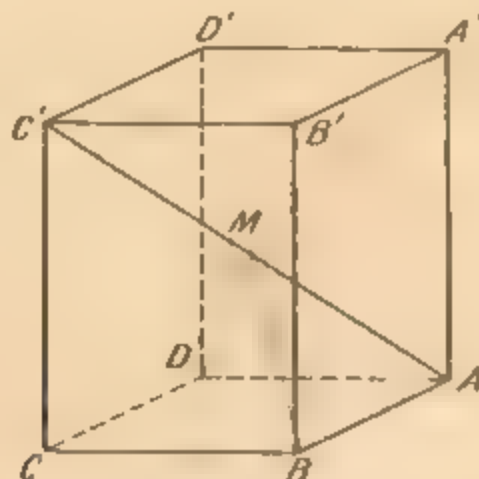
Fig. R.24



28. Dacă în triunghiurile dreptunghice  $ABC'$ ,  $ADC'$  și  $AA'C'$  înălțimile din vîrfurile unghiurilor drepte sînt concurente într-un punct  $T$ , situat pe ipotenuza comună  $AC'$ , rezultă că înălțimile sînt congruente (teorema înălțimii). Fie  $x, y, z$  lungimile celor trei muchii ale paralelipipedului (fig. R.25), avem:

$$BT = \frac{x\sqrt{y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad DT = \frac{y\sqrt{x^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad A'T = \frac{z\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Fig. R. 25



Egalînd și reducînd termenii asemenea, se obține:  $x = y = z$ .

24.  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ,  $BE = \frac{a \cdot a/\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , b)  $\frac{AD}{AE} = \frac{1}{3}$ .

25. Triunghiul  $A'NC'$  este echilateral. Înălțimea prisme este  $h = 2a$ ,  $V = 2a^3$ .

26.  $a^2 + b^2 + 2ab = d^2 \Rightarrow d^2 = (a + b)^2$ ,  $d = a + b$

27. a)  $AB = a$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $AC = a\sqrt{2}$ , b)  $S_{CVA} = \frac{a^2}{2}$ ,  $S_{AVB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ,

$$S_{CVB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad \alpha_1 = \frac{(1 + \sqrt{3})a^2}{2}.$$

28. a)  $\triangle SPQ \sim \triangle SBC$ ,  $\frac{PQ}{BC} = \frac{2}{3}$ ,  $PQ = \frac{2a}{3}$ ,  $QB = PC$ ,  $PC = \frac{a}{3}$ .  $\triangle APQ$  este isoscel. Înălțimea din  $A$  a triunghiului  $APQ$  este chiar înălțimea tetraedrului, deci este de  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $S_{APQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{9}$ ;

b) Se calculează volumul piramidei cu vîrf în  $A$  și baza  $SPQ$ , care are aceeași înălțime ca și tetraedrul dat,  $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ,  $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$ .

29. a) Se calculează lungimile proiecțiilor pe baza mare ale laturilor neparalele și se deduce că unghiurile ascuțite au fiecare cîte  $60^\circ$ . Se calculează înălțimea trapezului și apoi diagonala lui. Folosind reciproca teoremei lui Pitagora, se demonstrează că diagonalele sînt perpendiculare pe laturile neparalele;



b) Conform teoremei celor trei perpendiculare,  $SO \perp (OAB)$  și  $OA \perp AB \Rightarrow SA \perp AB$ ;

c)  $60^\circ$ ;

$$d) \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1A_1}{DA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{SO_1}{SO} = \frac{1}{2},$$

$$e) \frac{V}{V_0} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{A_1B_1C_1D_1} \cdot SO_1}{\frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{ABCD} \cdot SO} = \frac{1}{8}.$$

80. a)  $588 \text{ dm}^3$ , b)  $L = 15 \text{ dm}$ , c)  $\mathcal{A}_c = 240 \text{ dm}^2$ , d) Distanța este jumătate din înălțimea trunchiului de piramidă.

$$81. a) \mathcal{P} = 36 \text{ cm}, \quad \mathcal{A} = 52 \text{ cm}^2, \quad b) \mathcal{A}_c = 120\pi \text{ cm}^2, \quad \mathcal{V} = 132\pi \text{ cm}^3.$$

82. a)  $HT$  este înălțimea în triunghiul  $SBC$ ; b) Se obține un corp format din două conuri cu aceeași bază cu volumul  $\frac{1200}{13}\pi \text{ cm}^3$ .

$$83. a) 10\sqrt{2} + \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$b) \frac{500(2 + \sqrt{2})\pi}{9} \text{ cm}^3$$

84. a)  $60^\circ$  și  $120^\circ$ , b) triunghiul  $ABD$  este dreptunghic, c) se obține un trunchi de con cu volumul de  $\frac{100\sqrt{3}\pi}{3} \text{ cm}^3$ .

$$85. \mathcal{V}_1 = \frac{\pi h^2}{3} (2a + b), \quad \mathcal{V}_2 = \frac{\pi h^2}{3} (a + 2b). \text{ Volumul este mai mare în cazul a)}$$

Volumele nu pot fi egale

86. Se duce o secțiune axială în corp prin planul coșului al cubului. Notăm cu  $x$  muchia cubului și, folosind asemănarea triunghiurilor, se găsește  $x = \sqrt{2} \text{ cm}$ . Volumul conului este  $\mathcal{V}' = \frac{\pi\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$ , iar cel al cubului,  $\mathcal{V} = 2\sqrt{2} \text{ cm}^3$ . Se verifică ușor că  $\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} < \frac{1}{4}$ .

87. Fie  $AB' = a$  și  $\angle B'AB = \alpha$ . Conform uneia dintre reciprocele teoremei celor trei perpendiculare,  $BC' \perp AD$ . Rezultă că în triunghiul echilateral  $ABC$ ,  $D$  este mijlocul laturii  $BC$  ( $BD \equiv DC$ ) (fig. R 26). În triunghiul dreptunghic  $B'BA$ , avem  $AB = a \cos \alpha$  și  $B'B = a \sin \alpha$ , în triunghiul echilateral  $ABC$ ,  $BD = \frac{a \cos \alpha}{2}$ , în triunghiul dreptunghic

$AB'D$ :  $B'D = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Folosind teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic  $B'BD$ ,

$$\text{obținem: } a^2 \sin^2 \alpha + \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{4} = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2, \text{ sau: } \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{4} = \frac{1}{2}. \text{ De unde: } 4\sin^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha = 2 \text{ și } \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\cos u = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

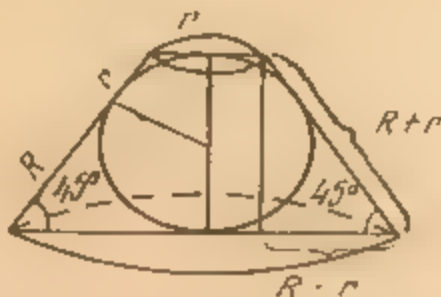
80. a) Se arată că proiecția unui punct de pe  $Ox$  — spre exemplu — pe planul  $xOy$  este egal depărtată de  $Ox$  și  $Oy$ , b)  $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

40.  $\frac{8R}{5}$ .

Fig. R.27

42. (Figura R 28) Se ține seama că generatoarea este egală cu suma razelor și se aplică teorema lui Pitagora. Se găsește  $R = 3(\sqrt{2} + 1)$  cm,  $r = 3(\sqrt{2} - 1)$  cm,  $\mathcal{A}_l = 72\pi$  cm<sup>2</sup>.

Fig. R 28



43. a) Raza bazei cilindrului este de 4 cm. Înălțimea calotei este de 2 cm,  $\mathcal{A}_c = 16\pi$  cm<sup>2</sup>; b)  $\mathcal{A}_l = 48\pi$  cm<sup>2</sup>;  $\mathcal{V} = 96\pi$  cm<sup>3</sup>.

44. a)  $AB = 2\sqrt{3}$  cm,  $AC = 2$  cm,  $BH = 3$  cm; b)  $BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$  cm,  $DE = \frac{8}{3}$  cm,  $EC = \frac{2}{3}$  cm, c) Se obține un cilindru reunit cu două conuri, având aceleași raze,  $\mathcal{A} = \frac{2(1 + 3\sqrt{3})\pi}{3}$  cm<sup>2</sup>.

45. Fie  $T$  punctul de pe sferă în care cele două cercuri sînt tangente,  $O$  centrul sferei și  $A, B$  centrele celor două cercuri tangente (fig. R 29). Se demonstrează că patrulaterul  $AOBT$  este inscribibil, apoi se calculează  $AB$  ca sumă a proiecțiilor segmentelor  $AT$  și  $BT$  pe  $AB$ . Se găsește,  $AB = \frac{b\sqrt{R^2 - a^2} + a\sqrt{R^2 - b^2}}{1}$ .

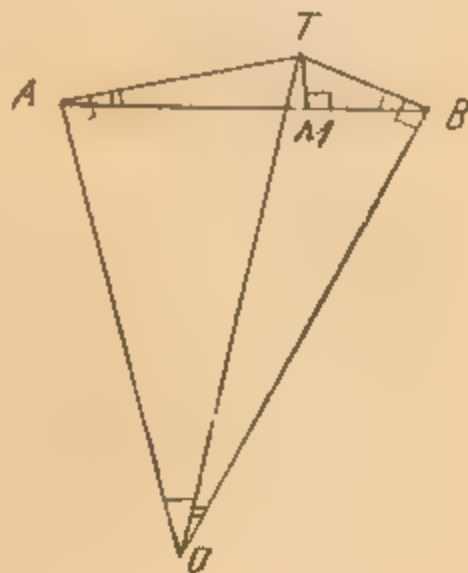
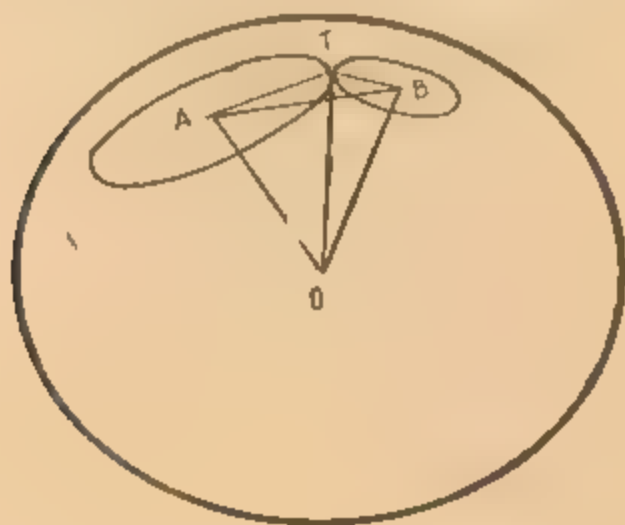


Fig. R 29

46. Punctul  $P$  este centrul sferei circumscrise conului (fig. R.30). Raza sferei este

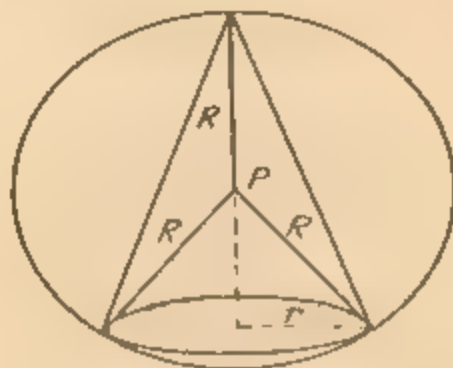
$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$


Fig. R.30

47. a)  $4^3 \cos 60^\circ = 8 \text{ (cm}^3\text{)}$ . b) Proiecția este un dreptunghi cînd una din laturile bazei este paralelă cu planul bazei. Proiecția este un romb atunci cînd o diagonală a pătratului este paralelă cu planul de proiecție.

## Cuprins

<b>PUNCTE, DREPTE, PLANE .....</b>	<b>3</b>
<i>Introducere .....</i>	<b>3</b>
Propoziții despre puncte, drepte și plane .....	<b>4</b>
Determinarea planului .....	<b>5</b>
Pozițiile relative ale dreptelor și ale planelor în spațiu .....	<b>7</b>
Pozițiile relative a două drepte în spațiu .....	<b>7</b>
<i>Probleme 1 .....</i>	<b>9</b>
Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan .....	<b>10</b>
Pozițiile relative a două plane .....	<b>11</b>
Cîteva teoreme de paralelism .....	<b>13</b>
<i>Probleme 2 .....</i>	<b>16</b>
Pozițiile relative a trei plane .....	<b>17</b>
<i>Probleme 3 .....</i>	<b>20</b>
Alte teoreme de paralelism .....	<b>21</b>
<i>Probleme 4 .....</i>	<b>23</b>
Perpendicularitatea în spațiu .....	<b>24</b>
Drepte perpendiculare .....	<b>24</b>
Dreapta perpendiculară pe un plan .....	<b>25</b>
<i>Probleme 5 .....</i>	<b>28</b>
Teorema celor trei perpendiculare .....	<b>30</b>
<i>Probleme 6 .....</i>	<b>32</b>
Plane perpendiculare .....	<b>33</b>
Perpendiculara comună a două drepte .....	<b>35</b>
Perpendicularitate și paralelism .....	<b>36</b>
Perpendiculare și oblice. Distanța de la un punct la un plan .....	<b>37</b>
<i>Probleme 7 .....</i>	<b>39</b>
Proiecții .....	<b>40</b>
Proiecții pe un plan .....	<b>41</b>



<i>Probleme</i> .....	43
Unghiul a două drepte .....	44
Unghiul unei drepte cu un plan .....	44
Unghiuri diedre .....	46
<i>Probleme 9</i> .....	52
<b>POLIEDRE PARTICULARE</b> .....	54
Tetraedrul .....	54
<i>Probleme 10</i> .....	57
Prisma .....	59
<i>Probleme 11</i> .....	61
<i>Probleme 12</i> .....	63
Volumul unei prisme triunghiulare .....	65
<i>Probleme 13</i> .....	67
Piramida .....	69
Volumul piramidei .....	72
<i>Probleme 14</i> .....	74
Trunchi de piramidă .....	78
Volumul trunchiului de piramidă .....	80
<i>Probleme 15</i> .....	81
Poliedre convexe în general .....	82
<b>TRANSFORMĂRI ÎN SPAȚIU</b> .....	84
Simetria față de un punct .....	84
Simetria față de o dreaptă .....	85
Simetria față de un plan .....	86
Translație în spațiu .....	87
rotație în jurul unei axe .....	87
Centru, axă, plan de simetrie a unei mulțimi de puncte .....	88
<i>Probleme 17</i> .....	89
<b>SUPRAFETE ȘI CORPURI ROTUNDE</b> .....	90
Generalități, considerații intuitive .....	90
Cilindri circulari .....	94

Pînze conice circulare .....	95
Sfera .....	97
Tangența suprafețelor curbe .....	99
Suprafețe de rotație .....	100
<i>Probleme 18</i> .....	104
Volumele și ariile corpurilor rotunde .....	105
Volumul cilindrului .....	105
Volumul conului .....	105
Aria laterală a cilindrului și a conului .....	106
Aria laterală a cilindrului drept .....	106
Aria laterală a conului circular drept .....	107
Aria și volumul trunchiului de con circular drept .....	108
Aria sferei .....	109
Volumul sferei .....	110
<i>Probleme 19</i> .....	112
Probleme recapitulative .....	115
Indicații și răspunsuri .....	121



